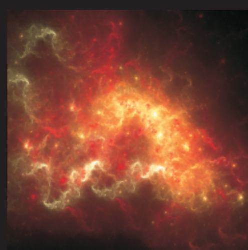
Coleção **olimpo**

IME ITA

E 01

Matrizes

Uma matriz de ordem $n \times m$ é, informalmente, uma tabela com n linhas e m colunas, em que "linhas" são as filas horizontais e "colunas" são as filas verticais. Com esta idéia temos a seguinte representação para a matriz A de ordem $n \times m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} .$$

O símbolo "a_{ij}" representa o elemento da linha i e coluna j.
Uma definição formal para uma matriz é:

"Considerando os conjuntos $I_n = \{1, 2, ..., n\}$ *e* $I_m = \{1, 2, ..., m\}$. *Uma matriz* A, de ordem $n \times m$, *é uma função* $A : I_n \times I_m \to \mathbb{R}$, *que associa cada par ordenado* (i, j) *a um número real* a_{ij}*".*

A notação $A = (a_{ij})_{n \times m}$ representa uma matriz de ordem $n \times m$ e o elemento a_{ij} é chamado de termo geral.

Exemplo: A matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, com $a_{ij} = 2 \cdot i - j^2$ é determinada pelo cálculo de todos os elementos de acordo com a lei de formação, ou seja:

$$a_{11} = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 \qquad a_{12} = 2 \cdot 1 - 2^2 = -2 \qquad a_{13} = 2 \cdot 1 - 3^2 = -7$$
$$a_{21} = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 \qquad a_{22} = 2 \cdot 2 - 2^2 = 0 \qquad a_{23} = 2 \cdot 2 - 3^2 = -5$$

desta forma temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Observações sobre a linguagem:

- O conjunto de todas as matrizes reais de ordem $n \times m$ é denotado por $M_{n \times m}(\mathbb{R})$
- Na matriz $A = (a_{ij})_{n \times m}$ sequência $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{im})$ é a i - ésima linha
- Na matriz $A = (a_{ij})_{n \times m}$ a sequência $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})$ é a j - ésima coluna

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

i-ésima linha

j-ésima coluna

- Sejam $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ duas matrizes reais. Diz-se que as matrizes A e B são iguais, e escreve-se $A=B$, se, e somente se, $a_{ij}=b_{ij}$, $\forall i\in\{1,\ 2,\ 3,\ ...,m\}$ e $\forall j\in\{1,\ 2,\ 3,\ ...,n\}$.

Classificações de matrizes

Matriz linha: É toda matriz formada por apenas uma linha.

Matriz coluna: É toda matriz formada por apenas uma coluna.

Matriz retangular: É toda matriz de ordem $n\times m$ com $n\neq m$.

Matriz nula: É toda matriz com todos os elementos nulos.

Matriz quadrada: É toda matriz de ordem $n\times n$. Neste caso dizemos que a matriz é de ordem n. Em uma matriz quadrada os elementos da sequência $\left(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}\right)$ formam a diagonal principal e os elementos da sequência $\left(a_{n1},a_{(n-1)\,2},\cdots,a_{1n}\right)$ forma a diagonal secundária.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

diagonal secundária *diagonal principal*

Matriz triangular Superior: É toda matriz quadrada de ordem n, em que $a_{ij}=0$ se $i>j$, ou seja, os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

Matriz triangular Inferior: É toda matriz quadrada de ordem n, em que $a_{ij}=0$ se $i<j$, ou seja, os elementos acima da diagonal principal são nulos.

Matriz transposta

Seja $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, a matriz transposta de A, indicada por A^t, e é $A^t=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ em que $b_{ij}=a_{ji}$. Em outros termos, a matriz transposta é obtida trocando linha por coluna da matriz original.

Exemplo:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -7\\ 3 & 0 & -5\end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad A^t=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\\ -7 & -5\end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Observações:

- Quando $A^t=A$ dizemos que a matriz A é simétrica.
- Quando $A^t=-A$ dizemos que a matriz A é antisimétrica.

Operações com matrizes

Adição de matrizes

Sejam $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ duas matrizes quaisquer. A soma de A com B, que indicaremos por $A+B$, é a matriz $m\times n$ cujo termo geral é $a_{ij}+b_{ij}$, isto é:

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}$$

Multiplicação por escalar

Dados a matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e um número real k, o produto indicado por $k\cdot A$, é a matriz $m\times n$ cujo termo geral é $k\cdot a_{ij}$, isto é:

$$k\cdot A=\begin{pmatrix}k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \dots & k\cdot a_{1n}\\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \dots & k\cdot a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & \dots & k\cdot a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}$$

Multiplicação de matrizes

Consideremos as matrizes $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B=\left(b_{jk}\right)_{n\times t}$. O produto de A por B, indicado por $A\cdot B$, é a matriz $m\times t$ cujo termo geral é c_{ik}, em que:

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk}=a_{i1}.b_{1k}+a_{i2}.b_{2k}+\ \dots\ +a_{in}.b_{nk}.$$

Observação: Para que o produto de matrizes seja possível é necessário que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz.

A matriz identidade de ordem n, denotada por I_n, é a matriz quadrada na qual todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos iguais a 0, ou seja:

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Propriedades

1. *Para a adição de matrizes temos $A,B,C\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$:*

- *A adição de matrizes é associativa* : $(A+B)+C=A+(B+C)$
- *A adição de matrizes é comutativa* : $A+B=B+A$
- A adição de matrizes admite *elemento neutro*: Existe uma matriz $O\in M_{n\times m}(R)$ tal que $A+O=O+A=A$.
- Existe matriz oposta: Para toda matriz $A\in M_{m\times n}(R)$, existe uma matriz indicada por $-A$, também de ordem $n\times m$, chamada *matriz oposta* de A, tal que $A+(-A)=(-A)+A=O$.

2. Para a multiplicação por escalar temos $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ e $A,B\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$

- $k_1\cdot\left(k_2\cdot A\right)=\left(k_1\cdot k_2\right)\cdot A$
- $\left(k_1+k_2\right)\cdot A=k_1\cdot A+k_2\cdot A$
- $k_1\cdot\left(A+B\right)=k_1\cdot A+k_1\cdot B$

3. Para a multiplicação de matrizes temos $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B\in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ e $C\in M_{p\times q}(\mathbb{R})$

- A multiplicação de matrizes é *associativa*: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.
- Vale a propriedade distributiva à esquerda: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
- Vale a propriedade distributiva à direita: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.
- Existe elemento neutro: $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$.
- $(k_1 \cdot A) \cdot B = A \cdot (k_1 \cdot B) = k_1 \cdot (A \cdot B)$.

Exercícios

01. (UFG) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & a^2 \\ -27 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2^b & 9 \\ a^3 & c \end{bmatrix}$. Para que elas sejam iguais, deve-se ter:

a) $a = -3$ e $b = -c = 4$
b) $a = 3$ e $b = c = -4$
c) $a = 3$ e $b = -c = -4$
d) $a = -3$ e $b = c = -4$
e) $a = -3$ e $b = c^2 = 4$

02. (UFBA) Se $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, a matriz transposta de $P - 2Q$ é:

a) $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

03. (SANTA CASA - SP) Se a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ x^2 & 0 & 1-y \\ x & y-3 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, então o valor de $x + y$ é:

a) 3 b) 1 c) 0
d) -2 e) -3

04. (SANTA CASA - SP) Se uma matriz quadrada A é tal que $A^t = -A$ ela é chamada anti-simétrica. Sabe-se que M é anti-simétrica e,

$$M = \begin{bmatrix} 4+a & \dots & \dots \\ a & b+2 & \dots \\ b & c & 2c-8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Os termos $a12$, $a13$ e $a23$ da matriz M valem respectivamente:
a) -4 , -2 e 4 .
b) 4 , 2 e -4 .
c) 4 , -2 e -4 .
d) 2 , -4 e 2 .
e) n.d.a.

05. (FATEC) Sabe-se que as ordens das matrizes A , B e C são, respectivamente, $3\times r$, $3\times s$ e $2\times t$. Se a matriz $(A-B)C$ é de ordem 3×4 , então $r+s+t$ é igual a:
a) 6
b) 8
c) 10
d) 12
e) 14

06. (FATEC) Uma indústria automobilística produz carros X e Y nas versões standart, luxo e superluxo. Peças A , B e C são utilizadas na montagem desses carros. Para um certo plano de montagem, é dada a seguinte informação:

	Carro X	Carro Y
Peça A	4	3
Peça B	3	5
Peça C	6	2

	Standard	Luxo	Superluxo
Carro X	2	4	3
Carro Y	3	2	5

Em termos matriciais, temos:

$$\text{matriz peça-carro} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{matriz carro-versão} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

A matriz peça-versão é:

a) $\begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 28 & 34 \\ 18 & 28 & 22 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 34 & 22 \\ 18 & 28 & 28 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 22 & 28 \\ 18 & 34 & 28 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 22 & 34 \\ 18 & 28 & 28 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 21 & 28 & 28 \\ 18 & 34 & 22 \end{bmatrix}$

07. (FUVEST) Considere as matrizes:
$A = (a_{ij})$, 4×7, definida por $a_{ij} = i - j$;
$B = (b_{ij})$, 7×9, definida por $b_{ij} = i$;
$C = (c_{ij})$, $C = AB$.

O elemento c_{63}:

a) é -112.
b) é -18.
c) é -9.
d) é 112.
e) não existe.

08. (ITA) Sejam A, B e C matrizes reais quadradas de ordem n e O_n a matriz nula também de ordem n. Considere as afirmações:

I. $AB = BA$
II. $AB = AC \Rightarrow B = C$
III. $A^2 = O_n \Rightarrow A = O_n$
IV. $(AB)C = A(BC)$
V. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

Então podemos afirmar que:

a) apenas a I é falsa.
b) apenas a IV é verdadeira.
c) V é verdadeira.
d) II e III são verdadeiras.
e) III e IV são verdadeiras.

E 02

Operação Elementar Sobre Linhas

Uma operação elementar sobre linhas de uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é qualquer uma das transformações:

- multiplicação de uma linha de A por uma constante real não nula k;
- permuta de duas linhas de A;
- substituição da r- ésima linha de A por uma linha formada pela soma da r- ésima linha com k vezes a s- ésima linha, sendo k um escalar arbitrário e $r \neq s$.

Exemplo: Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \end{pmatrix}_{2\times 3}$, temos:

- A multiplicação da primeira linha por 2: $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \end{pmatrix}_{2\times 3}$.
- A permuta da primeira com a segunda linha: $\begin{pmatrix} 7 & 11 & 13 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$.
- A substituição da primeira linha pela primeira linha soma da primeira linha com duas vezes a segunda linha: $\begin{pmatrix} 16 & 25 & 31 \\ 7 & 11 & 13 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

Cada operação elementar sobre linhas de uma matriz A pode ser representada pela multiplicação por uma matriz quadrada, observe:

- A multiplicação da primeira linha por 2: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 7 & 11 & 13 \end{pmatrix}_{2\times 3}$.
- A permuta da primeira com a segunda linha: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 13 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$.
- A substiruição da primeira linha pela soma dela com duas vezes a segunda: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 16 & 25 & 31 \\ 7 & 11 & 13 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

Matriz elementar

Definição:

Uma matriz $E \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ é dita elementar se $E \cdot A$ é alguma transformação elementar sobre linhas de A, para toda matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Usando a linguagem: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{1\times m}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{1\times m}$,... e $e_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{1\times m}$, podemos formar as matrizes elementares:

- Permutação da i - ésima linha com a j - ésima linha

$$P_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i - \text{ésima linha} \\ \\ \leftarrow j - \text{ésima coluna} \\ \\ \\ \end{array}.$$

Exemplo:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{m\times m}$$ (Permutação da primeira linha com a segunda linha)

- Multiplicação da i - ésima linha por uma constante não nula k:

$$M_i(k) = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ k \cdot e_i \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i - \text{ésima linha} \\ \\ \\ \end{array}.$$

Exemplos:

$$M_1(3) = \begin{pmatrix} 3 \cdot e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2(5)=\begin{pmatrix} e_1 \\ 5\cdot e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Substituição da i - ésima linha pelo resultado da soma da i - ésima linha com uma constante k arbitrária multiplicada pela j - ésima linha:

$$S_j^i(k)=\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i+k\cdot e_j \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i-\text{ésima linha} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

Exemplos:

$$S_2^1(5)=\begin{pmatrix} e_1+5\cdot e_2 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_3^1(7)=\begin{pmatrix} e_1+7\cdot e_3 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1^2(11)=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2+11\cdot e_1 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 11 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa

Definição: (*Inversa à esquerda*)

Diremos que uma matriz $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tem inversa à esquerda, denotada por L (uma matriz pertencente à $M_{n\times m}(\mathbb{R})$), se:

$$L\cdot A=I_n.$$

Exemplo: Seja a matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, observamos que $L=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$ é uma inversa à esquerda de A, pois:

$$L\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Definição: (*Inversa à direita*)

Diremos que uma matriz $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *tem inversa à direita, denotada por* R *(uma matriz pertencente à* $M_{n\times m}(\mathbb{R})$*), se:*

$$A\cdot R=I_m.$$

Exemplo: Seja a matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 7\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$, observamos que $R=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 5 & -7\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ é uma inversa à direita de A, pois:

$$A\cdot R=\begin{pmatrix}0 & 3 & 7\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 8\\ 5 & -7\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Definição: (Matriz inversa)

Diremos que uma matriz $A\in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ *tem inversa, denotada por* A^{-1}*, se:*

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_m,$$

ou seja, se possui inversa à direita e à esquerda simultaneamente.

Observações:

- Se uma matriz A possui inversa à direita e inversa a esquerda elas serão iguais, ou seja:

  Se $L\cdot A=I$ e $A\cdot R=I$, então $L=R$.
- Se A é inversível, A^{-1} tambem o é e $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.
- Se A e B são inversíveis, $A\cdot B$ também o é e $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.
- Chamamos de matriz ortogonal à matriz que satisfaz à condição:

  $$A^{-1}=A^t$$
- As matrizes elementares são inversíveis, note:

  $$\left(P_{ij}\right)^{-1}=P_{ij}$$

$$\left(M_i(k)\right)^{-1} = M_i\left(\frac{1}{k}\right),\ k \neq 0$$

$$\left(S_j^i(k)\right)^{-1} = S_j^i(-k)$$

- Se A é uma matriz inversível de ordem n, então existe uma sequência $E_1, E_2, \cdots, E_p$ de matrizes elementares tal que $\left(E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_p\right) \cdot A = I$, ou seja $A^{-1} = E_1 \cdot E_2 \cdot \ldots \cdot E_p$. Tal sequência garante um método para a obtenção da matriz inversa conhecido como método de Gauss-Jordan.

Exemplo: Para a obtenção da matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ criamos a matriz:

$$\left[A \quad | I\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Note que ao efetuarmos uma transformação elementar em $\left[A|I\right]$, a matriz transformação elementar fica registrada na parte correspondente à matriz identidade, observe:

$$M_2(-2) \cdot \left[A|I\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow M_2(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quando forem efetuadas todas as transformações elementares em

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

até transformá-la em

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11/2 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 & -1 & -3/2 \end{array}\right],$$

temos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11/2 & 2 & 5/2 \\ 3/2 & -1 & -1/2 \\ 7/2 & -1 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Este procedimento é conhecido como método de Gauss-Jordan.

A obtenção de uma matriz inversa, feita passo à passo, pode ser exemplificada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercícios

01. Usando a definição determine a inversa das matrizes

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

02. (ITA) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, então o elemento da terceira linha e primeira coluna, de sua inversa, será igual a:

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{9}{11}$ c) $\frac{6}{11}$ d) $-\frac{2}{13}$ e) $\frac{1}{13}$

03. Usando o método de Gauss-Jordan determine a inversa de cada matriz:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

04. O sistema linear $\begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y - z = 5 \\ x + 2 \cdot y - 2 \cdot z = -1 \\ 3 \cdot x + 3 \cdot y + z = 12 \end{cases}$ pode se associado à equação matricial $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix}$. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix}$, responda o que se pede:

a) Determine A^{-1}.

b) Observando que $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$, determine a solução do sistema apresentado.

05. Observando o procedimento apresentado na questão anterior, resolva o sistema:

$$\begin{cases} 2 \cdot x + y = 7 \\ x - z + w = 6 \\ y + z + w = 8 \\ -x + 3 \cdot w = 12 \end{cases}$$

06. (PUC SP) Sendo A e B matrizes inversíveis de mesma ordem e X uma matriz tal que $(X \cdot A)^t = B$, então:

a) $X = A^{-1} \cdot B^t$

b) $X = B^t \cdot A^{-1}$

c) $X = (B \cdot A)^t$

d) $X = (AB)^t$

e) n.d.a

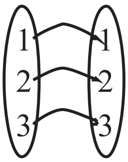
E 03

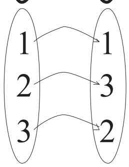
Determinantes

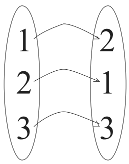
Ordem de uma permutação

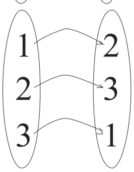
Uma permutação dos elementos do conjunto $I_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ é uma bijeção de I_n e I_n. Note que existem $n!$ bijeções.

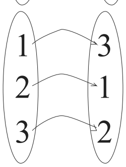
Exemplo: As permutações dos elementos do conjunto $\{1, 2, 3\}$ são:

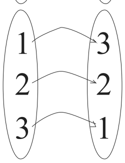
σ_1 :  $\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1(1) = 1 \\ \sigma_1(2) = 2 \\ \sigma_1(3) = 3 \end{cases}$

σ_2 :  $\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_2(1) = 1 \\ \sigma_2(2) = 3 \\ \sigma_2(3) = 2 \end{cases}$

σ_3 :  $\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_3(1) = 2 \\ \sigma_3(2) = 1 \\ \sigma_3(3) = 3 \end{cases}$

σ_4 :  $\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_4(1) = 2 \\ \sigma_4(2) = 3 \\ \sigma_4(3) = 1 \end{cases}$

σ_5 :  $\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_5(1) = 3 \\ \sigma_5(2) = 1 \\ \sigma_5(3) = 2 \end{cases}$

σ_6 :  $\Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_6(1) = 3 \\ \sigma_6(2) = 2 \\ \sigma_6(3) = 1 \end{cases}$

Como os elementos do domínio de uma permutação sempre podem estar em sua ordem natural, uma permutação fica inteiramente determinada ao ordenarmos as imgens, assim as permutações do exemplo anterior podem ser escritas como:

$$\sigma_1 = 123 \quad \sigma_2 = 132 \quad \sigma_3 = 213 \quad \sigma_4 = 231 \quad \sigma_5 = 312 \quad \sigma_6 = 321 .$$

Observando as permutações da esquerda para a direita, temos que na permutação $\sigma_1 = 123$ os elementos estão posicionados em sua ordem natural não havendo nenhuma inversão entre os elementos, neste caso dizemos que a permutação é ordem zero, ou seja $o(\sigma_1) = 0$. Na permutação $\sigma_6 = 321$ temos o 3 antes do 2 e do 1 (sofrendo duas inversões) e o 2 antes do 1 (sofrendo uma inversão), ou seja, houveram 3 inversões, o que diz que a permutação σ_6 é de ordem 3, que receberá a notação $o(\sigma_6) = 3$. Desta forma temos a seguinte sequência de permutações e suas respectivas ordens:

permutação	ordem
$\sigma_1 = 123$	$o(\sigma_1) = 0$
$\sigma_2 = 132$	$o(\sigma_2) = 1$
$\sigma_3 = 213$	$o(\sigma_3) = 1$
$\sigma_4 = 231$	$o(\sigma_4) = 2$
$\sigma_5 = 312$	$o(\sigma_5) = 2$
$\sigma_6 = 321$	$o(\sigma_6) = 3$

Determinante

Definição: Um determinante, denotado por $\det$, é uma função $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n!} (-1)^{o(\sigma_i)} \cdot a_{1\sigma_i(1)} \cdot a_{2\sigma_i(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_i(n)} ,$$

ou

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n!} (-1)^{o(\sigma_i)} \cdot a_{1\sigma_i(1)} \cdot a_{2\sigma_i(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_i(n)} .$$

Desta forma o determinante de uma matriz de ordem 2 é calculado fazendo:

$$\det(A) = (-1)^{o(\sigma_1)} \cdot a_{1\sigma_1(1)} \cdot a_{2\sigma_1(2)} + (-1)^{o(\sigma_2)} \cdot a_{1\sigma_2(1)} \cdot a_{2\sigma_2(2)}$$
$$\det(A) = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$
$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},$$

que na prática pode é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}.$$

$\ominus$ $\oplus$

Desta forma o determinante de uma matriz A de ordem 3 será calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & (-1)^{o(\sigma_1)} \cdot a_{1\sigma_1(1)} \cdot a_{2\sigma_1(2)} \cdot a_{3\sigma_1(3)} + (-1)^{o(\sigma_2)} \cdot a_{1\sigma_2(1)} \cdot a_{2\sigma_2(2)} \cdot a_{3\sigma_2(3)} + \\ & + (-1)^{o(\sigma_3)} \cdot a_{1\sigma_3(1)} \cdot a_{2\sigma_3(2)} \cdot a_{3\sigma_3(3)} + (-1)^{o(\sigma_4)} \cdot a_{1\sigma_4(1)} \cdot a_{2\sigma_4(2)} \cdot a_{3\sigma_4(3)} + \\ & + (-1)^{o(\sigma_5)} \cdot a_{1\sigma_5(1)} \cdot a_{2\sigma_5(2)} \cdot a_{3\sigma_5(3)} + (-1)^{o(\sigma_6)} \cdot a_{1\sigma_6(1)} \cdot a_{2\sigma_6(2)} \cdot a_{3\sigma_6(3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 \cdot a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \\ & + (-1)^2 \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + (-1)^2 \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 \cdot a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ & + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \end{aligned}$$

Exemplo: O determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ é:

$$\det(A) = 5 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 4 = -7$$

O uso da definição é muito dispendioso para o cálculo dos determinantes, por este motivo existem algumas regras práticas que tornam o cálculo mais rápido. Uma destas regras é a de Sarrus que será apresentada a seguir.

Regra de Sarrus

A regra de Sarrus é uma regra prática para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 3 e é dado pelo diagrama a seguir:

$$\det\left(A\right)=\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \ominus & \ominus & \ominus \quad \oplus & \oplus & \oplus \end{array}$$

$$\det\left(A\right)=a_{11}.a_{22}.a_{33}+a_{12}.a_{23}.a_{31}+a_{13}.a_{21}.a_{32}-a_{13}.a_{22}.a_{31}-a_{11}.a_{23}.a_{32}-a_{12}.a_{21}.a_{33}$$

Lema de Laplace

Uma submatriz de A é qualquer matriz obtida pela eliminação de linhas ou colunas (ou ambos) da matriz A.

Exemplo: As matrizes $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ são submatrizes de $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Definição (Matriz menor complementar): A submatriz obtida pela eliminação de uma linha e uma coluna de uma matriz quadrada é chamada de matriz menor complementar. Ao eliminarmos a linha i e a coluna j da matriz A obtemos a matriz menor complementar que será denotada por A_{ij}.

Exemplo: Sendo $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, então: $A_{11}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{23}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Definição (Cofator): O cofator do elemento a_{ij} da matriz A, denotado por Δ_{ij}, é o número

$$\Delta_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}\cdot\det\left(A_{ij}\right).$$

Lema (Laplace): O determinante da matriz $A\in M_{n\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ é dado por:

$$\det\left(A\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\cdot\Delta_{ij}$$, em que j pode ser qualquer elemento de $\left\{1,2,...,n\right\}$

ou

$$\det\left(A\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot\Delta_{ij}$$, em que i pode ser qualquer elemento de $\left\{1,2,...,n\right\}$.

Exemplo: Para calcular o determinante de $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ primeiro escolhemos uma linha (ou uma coluna) e usamos o segundo somatório do lema de laplace, neste caso existe vantagem em escolher a segunda linha, ou seja $i=2$, daí:

$$\det(A) = a_{21} \cdot \Delta_{21} + a_{22} \cdot \Delta_{22} + a_{23} \cdot \Delta_{23} .$$

Calculando os cofatores:

- Como $a_{21} = 0$ não há necessidade de calcular o cofator Δ_{21}.
- $\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7$
- $\Delta_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -7\sum_{i=1}^{n} X_i$

$\det(A) = 0 \cdot \Delta_{21} + 2 \cdot (-7) + (-1) \cdot (-7) = -7$.

Exercícios

01. (FUVEST) Calcule os determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ a & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

02. (UFSE) O determinante da matriz $A = (a_{ij})_{3\times3}$, onde $a_{ij} = 2i - j$, é igual a:

a) -12
b) -8
c) 0
d) 4
e) 6

03. (UFPA) Qual o valor de k para que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}$ seja nulo?

a) $-1 \pm \sqrt{2}$
b) $\sqrt{2} \pm 1$
c) $2 \pm \sqrt{2}$
d) $\sqrt{2} \pm 2$
e) $-4 \pm \sqrt{8}$

04. (SANTA CASA) Seja a matriz quadrada $A=(a_{ij})$, de ordem 2, tal que

$$a_{ij}=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2i-j} & \text{se } i=j\\[2ex] \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{i+j} & \text{se } i\neq j\end{cases}$$ o determinante de A é igual a:

a) $\dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) 0

d) $-\dfrac{1}{4}$ e) $-\dfrac{3}{4}$

05. (UF UBERLÂNDIA) Sabendo-se que o determinante da matriz A é igual a $¿-3$, qual é o valor do $\operatorname{sen} x$, $\dfrac{3\pi}{2}\leq x\leq 2\pi$?

$$A=\begin{bmatrix}\cos x & 1 & 1\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & \cos x & 0\end{bmatrix}$$

a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\dfrac{1}{2}$ c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\dfrac{1}{2}$

06. (UNESP) Se a e b são as raízes da equação $\begin{vmatrix}2^x & 8^x & 0\\ \log_2 x & \log_2 x^2 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$, onde $x>0$, então $a+b$ é igual a:

a) $\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{3}{4}$ c) $\dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{4}{3}$ e) $\dfrac{4}{5}$

07. (CESESP) Se A é uma matriz quadrada de ordem 3 e I é a matriz identidade também de ordem 3, então $\det\,(A-\lambda\cdot I)$ é um polinômio de grau 3 em λ.

Assinale a alternativa correspondente ao conjunto das raízes do polinômio acima definido, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $\{0,\ 2\}$ b) $\{0,\ 3\}$

c) $\{1, -1,\ 0\}$ d) $\{1,\ 0,\ 3\}$

e) $\{-1,\ 1,\ 3\}$

08. (Determinante da matriz de Vandermonde) Demonstre que:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)\cdot(z-y)\cdot(z-x)$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{vmatrix} = (y-x)\cdot(z-y)\cdot(z-x)\cdot(w-z)\cdot(w-y)\cdot(w-x)$$

09. (UF UBERLÂNDIA) O determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 8 & \log 80 & \log 800 & \log 8000 \\ (\log 8)^2 & (\log 80)^2 & (\log 800)^2 & (\log 8000)^2 \\ (\log 8)^3 & (\log 80)^3 & (\log 800)^3 & (\log 8000)^3 \end{vmatrix}$$ vale:

a) $\log (8.80.800.8000)$

b) 12

c) $\log 8^{24}$

d) $\log 8 + \log 80 + \log 800 + \log 8000$ e) 24

E 04

Propriedades dos determinantes

Para uma matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ valem as seguintes propriedades:

1. Os determinantes da matriz A e de sua transposta A^t são iguais, isto é $\det A = \det A^t$.

Exemplo: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & x \\ b & 2 & y \\ c & 3 & z \end{vmatrix}$

2. Se os elementos de uma fila qualquer de A forem nulos, então $\det A = 0$.

Exemplo: $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 0$

3. Se os elementos de duas filas paralelas de A forem iguais ou proporcionais, então $\det A = 0$.

Exemplos: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$ e $\begin{vmatrix} a & b & 2b \\ 1 & 2 & 4 \\ x & y & 2y \end{vmatrix} = 0$

4. Se A tem uma fila que é combinação linear de outras filas paralelas, então $\det A = 0$.

Exemplo: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+3x & 2b+3y & 2c+3z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

5. Se trocarmos de posição duas filas paralelas de A, obtemos uma nova matriz A' tal que $\det A = -\det A'$ det A = –det A′.

Exemplo: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c & b \\ 1 & 3 & 2 \\ x & z & y \end{vmatrix}$

6. Se multiplicarmos uma fila qualquer de A por uma constante k, obtemos uma nova matriz A' tal que $\det A' = k \cdot \det A$.

Exemplo: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 6 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$

7. Se multiplicarmos todos os elementos de A por uma constante k, obteremos uma nova matriz $A' = k \cdot A$ tal que det $A' = \det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$, onde n é a ordem de A.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4 & 8 & 12 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} = 4^3.\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$

8. *Teorema de Jacobi*: Se adicionarmos a uma fila qualquer uma combinação linear das demais filas paralelas de uma matriz, seu determinante não se altera.

Exemplo: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c-2a+b \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & x-2y+z \end{vmatrix}$

9. *Adição de determinantes*: Se os elementos da j - ésima coluna de A são tais que:

$\begin{cases} a_{1j} = b_{1j} + c_{1j} \\ a_{2j} = b_{2j} + c_{2j} \\ \quad \cdots \\ a_{nj} = b_{nj} + c_{nj} \end{cases}$, isto é $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & (b_{1j} + c_{1j}) & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & (b_{2j} + c_{2j}) & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (b_{nj} + c_{nj}) & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, então teremos

que:

$\det A = \det A' + \det A''$, onde $A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ e

$$A'' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo: $\begin{vmatrix} a & 3 & c \\ m & 6 & p \\ x & 1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & c \\ m & 2 & p \\ x & 0 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 2 & c \\ m & 4 & p \\ x & 1 & z \end{vmatrix}$

Teorema de Binet

Sendo $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, então $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.

Observação:

O teorema de Binet garante que $\det\left(A^k\right) = \det(A)^k$.

Matriz Inversa

Definição: A matriz adjunta de A, denotada por A^*, é a matriz transposta dos cofatores de A, ou seja, se Δ_{ij} é o cofator do elemento a_{ij}, então:

$$A^* = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}.$$

A matriz inversa de A é dada por $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot A^*$.

Exercícios

01. (MACK - SP) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & 5 & 1 \\ b & 3 & 2 \\ c & 2 & 3 \end{bmatrix}$ de determinantes não nulos. Então para quaisquer valores de a, b, c temos:
    a) $\det A = 2 \cdot \det B$
    b) $\det A = \det (B)^t$
    c) $\det (A)^t = \det B$
    d) $\det B = 2 \cdot \det A$
    e) $\det A = \det B$

02. (UFRS) Se $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -12$, então $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ vale:
    a) -4
    b) $-\dfrac{4}{3}$
    c) $\dfrac{4}{3}$
    d) 4
    e) 12

03. (OSEC - SP) O valor do determinante $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ m & 1+p & 1 & 1 \\ m & 1 & 1+r & 1 \\ m & 1 & 1 & 1+s \end{vmatrix}$ é:
    a) $4prs$
    b) prs
    c) mps
    d) $mprs$
    e) $4mprs$

04. (ITA) Sendo A uma matriz quadrada de ordem 3, cujo determinante é igual a 4, qual o valor de x na equação $\det(2 \cdot A \cdot A^t) = 4x$?

05. (ITA) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ então o elemento da terceira linha e primeira coluna, de sua inversa, será igual a:

a) $\frac{5}{8}$

b) $\frac{9}{11}$

c) $\frac{6}{11}$

d) $-\frac{2}{13}$

e) $\frac{1}{13}$

06. (ITA) Sejam A, B e C matrizes reais 3×3 satisfazendo às seguintes relações: $A \cdot B = C^{-1}$ e $B = 2 \cdot A$. Se o determinante de C é 32, qual é o valor do módulo do determinante de A?

07. (UFPE) Seja $f: M_n \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(A) =$ determinante de A, onde M_n é o conjunto das matrizes quadradas de ordem $n \leq 3$.

Assinale a alternativa correta:

a) f é injetiva.

b) f é sobrejetiva.

c) $f(A + B) = f(A) + f(B)$.

d) $f(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot f(A)$, qualquer que seja $\lambda \in R$.

e) Se $f(A) = 0$, então $A = O$.

08. (UFGO) Qual o valor de um determinante de quarta ordem, sabendo-se que multiplicando duas de suas linhas por 3 e dividindo suas colunas por 2 obtém-se o número 27?

a) $\dfrac{243}{16}$
b) 18
c) 6
d) 48
e) 27

09. (UF FORTALEZA) O determinante de uma matriz é 42. Se multiplicarmos a primeira linha da matriz por três e dividirmos sua segunda coluna por nove, a nova matriz terá determinante igual a:
a) 12
b) 14
c) 21
d) 42

10. (ITA) Sendo A, B, C matrizes reais $n \times n$, considere as seguintes afirmações:
1. $A(BC) = (AB)C$
2. $AB = BA$
3. $A + B = B + A$
4. $\det(AB) = \det(A).\det(B)$
5. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

Então podemos afirmar que:
a) 1 e 2 são corretas.
b) 2 e 3 são corretas.
c) 3 e 4 são corretas.
d) 4 e 5 são corretas.
e) 5 e 1 são corretas.

11. (UECE) Considere as seguintes afirmativas:
I. Se A^T é a transposta da matriz quadrada A, então $\det(A^T) = \det(A)$.
II. Se A é uma matriz quadrada de ordem 2 tal que $AA = \mathrm{O}$, então a matriz $I - A$ é inversível.
III. Se A é uma matriz inversível, então $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

A soma dos números associados às afirmativas corretas é:
a) 3
b) 5
c) 6
d) 4

12. (ITA) Sejam A, B e C matrizes quadradas $n \times n$ tais que A e B são inversíveis e $ABCA = A^t$, onde A^t é a transposta da matriz A. Então podemos afirmar que:

a) C é inversível e $\det C = \det (AB)^{-1}$.
b) C não é inversível pois $\det C = 0$.
c) C é inversível e $\det C = \det B$.
d) C é inversível e $\det C = (\det A)^2 \cdot \det B$.
e) C é inversível e $\det C = \dfrac{\det A}{\det B}$.

13. (ITA) Seja $C = \{X \in M_{2\times 2}; X^2 + 2X = O\}$ .Dadas as afirmações:

I. Para todo $X \in C$, $(X + 2I)$ é inversível.
II. Se $X \in C$ e $\det (X + 2I) \neq 0$, então X não é inversível.
III. Se $X \in C$ e $\det X \neq 0$, então $\det X > 0$.

Podemos dizer que:
a) Todas são verdadeiras.
b) Todas sã falsas.
c) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.
d) Apenas (I) é verdadeira.
e) n.d.a.

Coleção **olimpo**

IME ITA

opirus
EDITORA