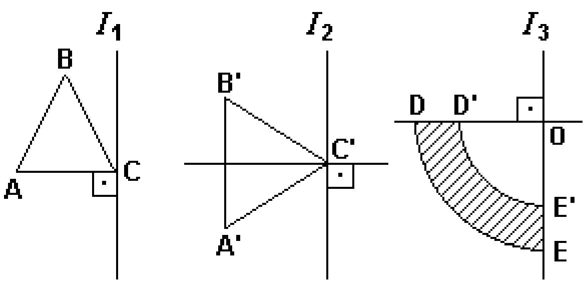
Exercícios de Matemática
Esferas

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO
(Ufpe) Na(s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses (V) se for verdadeiro ou (F) se for falso.

1. Nas figuras a seguir, os triângulos ABC e A' B' C' são equiláteros com lados medindo 3cm, e DE e D' E' são arcos de circunferência com centro em O e raios iguais a 3cm e 2cm, respectivamente.



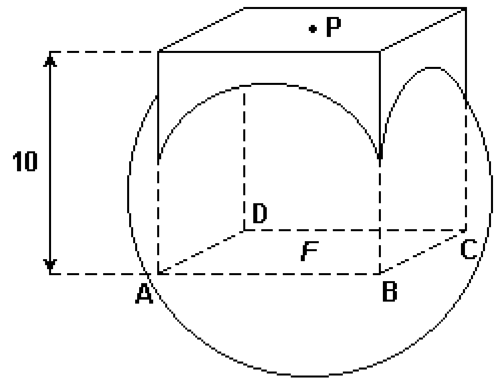
Seja S o sólido obtido pela rotação de 360° do triângulo ABC em torno de l_1, S_2 pela rotação de 360° de A' B' C' em torno de l_2 e S_3 pela rotação de 360° da região hachureada em torno de l_3. Podemos afirmar que:

(   ) S é obtido de um cone circular reto retirando-se dois outros cones circulares retos.
(   ) O volume de S é igual ao volume do cone com raio igual a 3/2cm e altura igual 3√ 3/2cm.
(   ) S_2 é obtido de um cilindro circular reto retirando-se dois cones circulares retos.
(   ) A área da superfície de S_2 é igual à área de um cone circular reto de raio 3√ 3/2cm e altura 3cm.
(   ) S_4 é obtido de um hemisfério retirando-se outro hemisfério.

2. (Unicamp) Uma esfera de raio 1 é apoiada no plano xy de modo que seu pólo sul toque a origem desse plano. Tomando a reta que liga o pólo norte dessa esfera a qualquer outro ponto da esfera, chamamos de "projeção estereográfica" desse outro ponto ao ponto em que a reta toca o plano xy. Identifique a projeção estereográfica dos pontos que formam o hemisfério sul da esfera.

3. (Ufpe) Um triângulo equilátero tem lado 18√ 3cm e é a base de um prisma reto de altura 48cm. Calcule o raio da maior esfera contida neste prisma.

4. (Ufrj) Um cubo de aresta 10 cm tem os quatro vértices A, B, C e D de uma de suas faces, F, sobre a superfície de uma esfera S de raio r. Sabendo que a face oposta a F é tangente à esfera S no ponto P, calcule o raio r. Justifique.



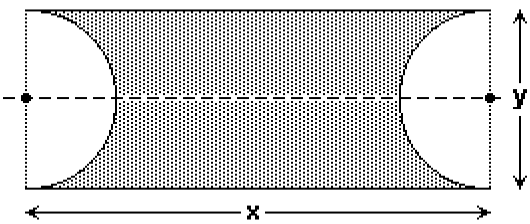
5. (Unitau) Uma esfera de raio R está inscrita em um cilindro. O volume do cilindro é igual a:
a) π r^3/3.
b) 2π r^3/3.
c) π r^3.
d) $2r^3$.
e) 2π r^3.

6. (Ufv) Considere as afirmações abaixo:

I - A esfera de volume igual a 12π cm^3 está inscrita em um cilindro equilátero cujo volume é 24π cm^3.
II - A esfera de raio 4√ 3 cm circunscreve um cubo de volume igual a $64cm^3$.
III - Dobrando o raio da base de um cilindro circular reto, o seu volume será quadruplicado.

Assinalando V para as afirmações verdadeiras e F para as afirmações falsas, obtém-se a seguinte seqüência CORRETA:
a) V F V
b) F V F
c) V V F
d) F F V
e) V V V

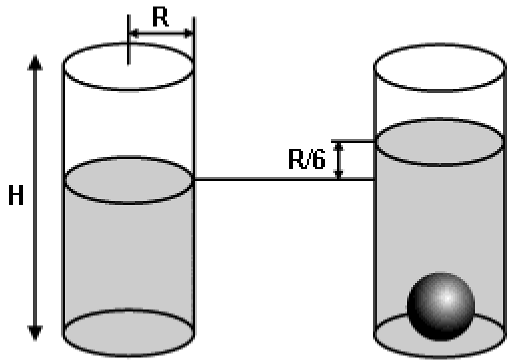
7. (Ufrj) Considere um retângulo, de altura y e base x, com x > y, e dois semicírculos com centros nos lados do retângulo, como na figura a seguir.



Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região sombreada em torno de um eixo que passa pelos centros dos semicírculos. Justifique.

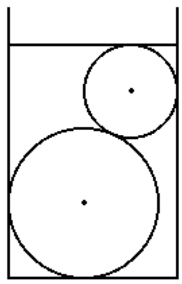
8. (Ufrn) No final de um curso de Geometria, o professor fez um experimento para saber a razão entre os diâmetros de duas bolinhas de gude de tamanhos diferentes. Primeiro, colocou a bola menor num recipiente cilíndrico graduado e observou que o nível da água se elevou 1,5 mm e, logo em seguida, colocando a bola maior, observou que o nível da água subiu 12,0 mm.
O professor concluiu que a razão entre o diâmetro da bola maior e o diâmetro da bola menor é igual a
a) 2
b) 3
c) 6
d) 8

9. (Unesp) Em um tanque cilíndrico com raio de base R e altura H contendo água é mergulhada uma esfera de aço de raio r, fazendo com que o nível da água suba 1/6 R, conforme mostra a figura.



a) Calcule o raio r da esfera em termos de R.
b) Assuma que a altura H do cilindro é 4R e que antes da esfera ser mergulhada, a água ocupava 3/4 da altura do cilindro. Calcule quantas esferas de aço idênticas à citada podem ser colocadas dentro do cilindro, para que a água atinja o topo do cilindro sem transbordar.

10. (Uerj) Duas esferas metálicas maciças de raios iguais a 8 cm e 5 cm são colocadas, simultaneamente, no interior de um recipiente de vidro com forma cilíndrica e diâmetro da base medindo 18 cm. Neste recipiente despeja-se a menor quantidade possível de água para que as esferas fiquem totalmente submersas, como mostra a figura.



Posteriormente, as esferas são retiradas do recipiente.
A altura da água, em cm, após a retirada das esferas, corresponde, aproximadamente, a:

a) 10,6
b) 12,4
c) 14,5
d) 25,0

11. (Ufsm) A área da superfície de uma esfera e a área total de um cone circular reto são iguais. Se o raio da base do cone mede 4 cm e o volume do cone é 16π cm^3, o raio da esfera é dado por
a) $\sqrt{3}$ cm
b) 2 cm
c) 3 cm
d) 4 cm
e) $4 + \sqrt{2}$ cm

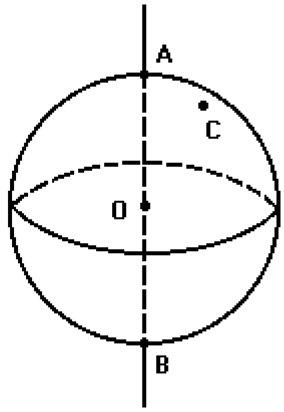
12. (Fuvest) Uma superfície esférica de raio 13cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência.
O raio desta circunferência, em cm é:
a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

13. (Unitau) Aumentando em 10% o raio de uma esfera a sua superfície aumentará:
a) 21 %.
b) 11 %.
c) 31 %.
d) 24 %.
e) 30 %.

14. (Unesp) Um plano intercepta uma esfera perpendicularmente a um de seus diâmetros num ponto P distinto do centro e interior a esse diâmetro.
a) Provar que a intersecção é um círculo.
b) Determinar (em função do raio r da esfera) a distância do ponto P ao centro, a fim de que o círculo intersecção tenha área igual à metade da de um círculo máximo da esfera.

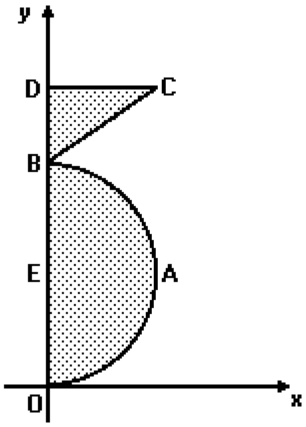
15. (Unesp) Considere uma circunferência C de raio r num plano α e aponte a única alternativa falsa.
a) Existem superfícies esféricas cuja intersecção com α é C.
b) Existe apenas uma superfície esférica de raio r cuja intersecção com α é C.
c) Dentre as superfícies esféricas que interceptam α segundo C, há uma de raio menor.
d) Dentre as superfícies esféricas que interceptam α segundo C, há uma de raio maior.
e) Se t>r, há duas, e apenas duas, superfícies esféricas de raio t cuja intersecção com α é C.

16. (Uel) Na figura a seguir são dados uma esfera de centro O, uma reta que contém O e intercepta superfície esférica nos pontos A e B e um ponto C na superfície esférica.



Em relação às medidas dos segmentos determinados na figura é sempre verdade que
a) OC < OA
b) OB > OA
c) AC = OC
d) OB = OC/2
e) AB = 2.OC

17. (Ufmt) A região sombreada na figura a seguir sofre uma rotação completa em torno do eixo y. Os pontos
O=(0,0); A=(1,1); B=(0,2); C=(1,3); D=(0,3) e E=(0,1).
OAB é uma semicircunferência com centro em E, conforme mostra a figura a seguir.



Sendo V a medida do volume do sólido de revolução gerado, calcule o valor de $36/5\pi$ .V.

18. (Fgv) Deseja-se construir um galpão em forma de um hemisfério, para uma exposição. Se, para o revestimento total do piso, utilizou-se 78,5m^2 de lona, quantos metros quadrados de lona se utilizaria na cobertura completa do galpão?
(Considerar π =3,14).
a) 31,4
b) 80
c) 157
d) 208,2
e) 261,66

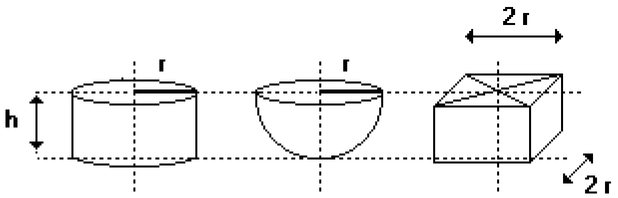
19. (Unicamp) O volume V de uma bola de raio r é dado pela fórmula $V=4\pi R^3/3$.
a) Calcule o volume de uma bola de raio r=3/4cm. Para facilitar os cálculos você deve substituir π pelo número 22/7.
b) Se uma bola de raio r=3/4cm é feita com um material cuja densidade volumétrica (quociente da massa pelo volume) é de 5,6g/cm^3, qual será a sua massa?

20. (Unesp) Uma circunferência contida na superfície de uma esfera diz-se circunferência máxima da esfera se seu raio é igual ao raio da esfera. Assim, pode-se afirmar que:
a) Toda circunferência contida na superfície de uma esfera é uma circunferência máxima da esfera.
b) Um plano e uma esfera que se cortam ou têm um único ponto em comum ou sua interseção contém uma circunferência máxima da esfera.
c) Os planos determinados por duas circunferências máximas distintas de uma mesma esfera são necessariamente secantes e sua interseção contém um diâmetro comum às duas.
d) Dadas duas esferas concêntricas distintas, uma circunferência máxima de uma e uma circunferência máxima da outra são necessariamente circunferências concêntricas coplanares.
e) Duas circunferências máximas de uma mesma esfera estão necessariamente contidas em planos perpendiculares.

21. (Mackenzie) A razão entre os volumes das esferas circunscrita e inscrita a um mesmo cubo é:
a) $\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $3\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{(3)}/3$
e) $3\sqrt{(3)}/2$

22. (Mackenzie) A altura de um cone reto é igual ao raio da esfera a ele circunscrita. Então o volume da esfera é:
a) o dobro do volume do cone.
b) o triplo do volume do cone.
c) o quádruplo do volume do cone.
d) 4/3 do volume do cone.
e) 8/3 do volume do cone.

23. (Uff) Na figura estão representados três sólidos de mesma altura h - um cilindro, uma semi-esfera e um prisma - cujos volumes são V_1, V_2 e V_3, respectivamente.



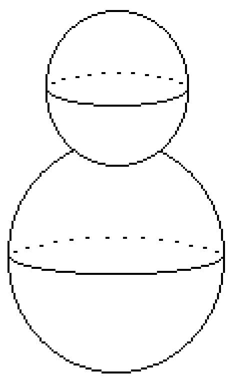
A relação entre V_1, V_2 e V_3 é:
a) $V_3 < V_2 < V_1$
b) $V_2 < V_3 < V_1$
c) $V_1 < V_2 < V_3$
d) $V_3 < V_1 < V_2$
e) $V_2 < V_1 < V_3$

24. (Pucmg) Uma esfera de raio r = 3 cm tem volume equivalente ao de um cilindro circular reto de altura h = 12 cm. O raio do cilindro, em cm, mede:
a) 1
b) 2
c) $\sqrt{3}$
d) 3
e) $\sqrt{13}$

25. (Mackenzie) A figura dada pelos pontos (x, y) do plano tais que $x=\sqrt{(9-y^2)}$ gira em torno do eixo das ordenadas descrevendo um ângulo $0 < \alpha \leq 360°$ e gerando um sólido de volume 9π. Então α vale:
a) 60°
b) 90°
c) 30°
d) 45°
e) 120°

26. (Unesp) Seja r um número real positivo e P um ponto do espaço. O conjunto formado por todos os pontos do espaço, que estão a uma distância de P menor ou igual a r, é
a) um segmento de reta medindo 2r e tendo P como ponto médio.
b) um cone cuja base é um círculo de centro P e raio r.
c) um cilindro cuja base é um círculo de centro P e raio r.
d) uma esfera de centro P e raio r.
e) um círculo de centro P e raio r.

27. (Ufrj) Ping Oin recolheu $4{,}5m^3$ de neve para construir um grande boneco de 3m de altura, em comemoração à chegada do verão no Pólo Sul.
O boneco será composto por uma cabeça e um corpo ambos em forma de esfera, tangentes, sendo o corpo maior que a cabeça, conforme mostra a figura a seguir.
Para calcular o raio de cada uma das esferas, Ping Oin aproximou π por 3.



Calcule, usando a aproximação considerada, os raios das duas esferas.

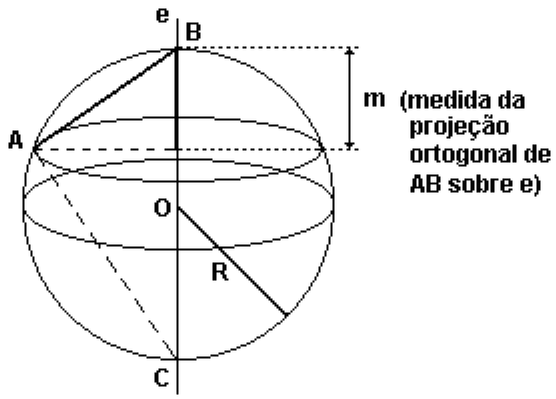
28. (Mackenzie) A razão entre a área lateral do cilindro eqüilátero e da superfície esférica, da esfera nele inscrita, é:
a) 1
b) 1/2
c) 1/3
d) 1/4
e) 2/3

29. (Puccamp) Considere as sentenças:

I. Se um plano intercepta uma superfície esférica, a intersecção é um ponto ou uma circunferência.
II. Se os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são dois diâmetros de uma esfera, então o quadrilátero ABCD é um retângulo.
III. Todo plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência.

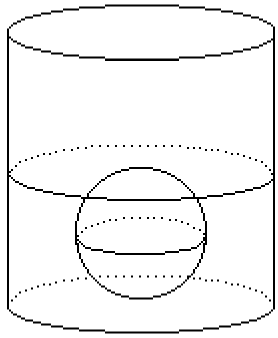
É correto afirmar que
a) somente I é verdadeira.
b) somente II é verdadeira.
c) somente III é verdadeira.
d) somente I e III são verdadeiras.
e) I, II e III são verdadeiras.

30. (Uerj)



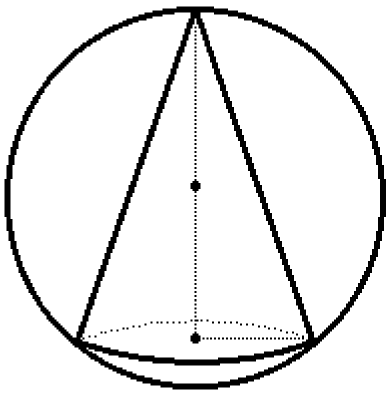
Na figura anterior, há um círculo de raio R e uma reta (e) que contém o seu centro - ambos do mesmo plano. Fez-se uma rotação de uma volta desse círculo ao redor da reta (e). O menor arco AB nele assinalado descreveu a superfície de uma calota esférica, cuja área pode ser calculada através da fórmula 2π Rm, sendo m a projeção ortogonal do arco AB sobre a reta (e).
a) Calcule o comprimento da corda AB, do círculo original, em função de R e m.
b) Demonstre que a área da calota esférica gerada pelo arco AB é equivalente à área plana limitada por uma circunferência de círculo cujo raio tem a mesma medida da corda AB.

31. (Ufrs) Uma esfera de raio 2 cm é mergulhada num copo cilíndrico de 4 cm de raio, até encostar no fundo, de modo que a água do copo recubra exatamente a esfera.



Antes da esfera ser colocada no copo, a altura de água era
a) 27/8 cm
b) 19/6 cm
c) 18/5 cm
d) 10/3 cm
e) 7/2 cm

32. (Pucsp) Um cone circular reto, cujo raio da base é 3cm, está inscrito em uma esfera de raio 5cm, conforme mostra a figura a seguir.

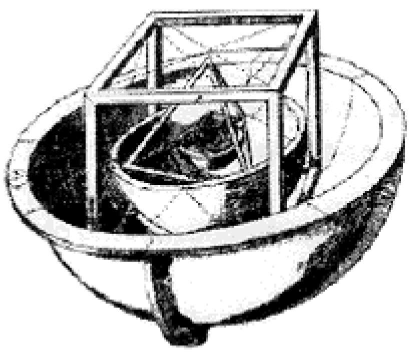


O volume do cone corresponde a que porcentagem do volume da esfera?
a) 26,4 %
b) 21,4 %
c) 19,5 %
d) 18,6 %
e) 16,2 %

33. (Ufrrj) Sendo S uma esfera de raio r, o valor pelo qual deveríamos multiplicar r, a fim de obtermos uma nova esfera S', cujo volume seja o dobro do volume de S, é

a) $\sqrt[3]{2}$.
b) $2\sqrt[3]{2}$.
c) 2.
d) 3.
e) $\sqrt{3}$.

34. (Uerj) O modelo astronômico heliocêntrico de Kepler, de natureza geométrica, foi construído a partir dos cinco poliedros de Platão, inscritos em esferas concêntricas, conforme ilustra a figura abaixo:



(LER, J. "*Dissertatio e Narratio*". Turim: Bottega d'Erasmo, 1972.)

A razão entre a medida da aresta do cubo e a medida do diâmetro da esfera a ele circunscrita, é:
a) $\sqrt{3}$
b) $(\sqrt{3})/2$
c) $(\sqrt{3})/3$
d) $(\sqrt{3})/4$

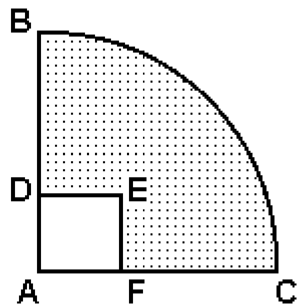
35. (Uepg) A relação entre o volume e a área de uma esfera é 1. Então, é correto afirmar que

01) a área dessa esfera é igual a três vezes a área de uma esfera de 1u.c. de raio.
02) o raio dessa esfera vale 3u.c.
04) a aresta de um cubo circunscrito a essa esfera vale 6u.c.
08) essa esfera pode ser inscrita num cilindro eqüilátero de altura 6u.c.
16) a geratriz de um cone cujo raio da base tem a mesma medida do raio dessa esfera e cuja altura é 4u.c. vale 5u.c.

36. (Fgv) a) Um cubo maciço de metal, com 5cm de aresta, é fundido para formar uma esfera também maciça. Qual o raio da esfera?

b) Deseja-se construir um reservatório cilíndrico com tampa, para armazenar certo líquido. O volume do reservatório deve ser de $50m^3$ e o raio da base do cilindro deve ser de 2m. O material usado na construção custa R$100,00 por metro quadrado. Qual o custo do material utilizado?

37. (Ufmg) Observe esta figura:



Nessa figura, ABC é um quadrante de círculo de raio 3cm e ADEF é um quadrado, cujo lado mede 1cm. Considere o sólido gerado pela rotação de 360°, em torno da reta AB, da região hachurada na figura.

Sabe-se que o volume de uma esfera de raio r é igual a $(4\pi r^3/3)$.
Assim sendo, esse sólido tem um volume de
a) 14π cm^3
b) 15π cm^3
c) 16π cm^3
d) 17π cm^3

38. (Unesp) Um paciente internado em um hospital tem que receber uma certa quantidade de medicamento injetável (tipo soro). O frasco do medicamento tem a forma de um cilindro circular reto de raio 2cm e altura 8cm. Serão administradas ao paciente 30 gotas por minuto. Admitindo-se que uma gota é uma esfera de raio 0,2cm, determine:

a) o volume, em cm^3, do frasco e de cada gota (em função de π).

b) o volume administrado em cada minuto (considerando a quantidade de gotas por minuto) e o tempo gasto para o paciente receber toda a medicação.

39. (Ufsc) Marque a(s) proposição(ões) CORRETA(S).

01. Quando exposta ao sol, uma barra de metal com 30m de comprimento aumenta em 1% o seu comprimento. Logo, essa barra de metal quando exposta ao sol passa a medir 30,03m.

02. Uma parede de $4m^2$ pode ser revestida completamente com 50 azulejos de 20cm por 40cm.

04. Quando se duplica o raio da base de um cone, (mantendo fixa a altura), o seu volume fica quadruplicado, e quando se duplica a sua altura (mantendo fixo o raio da base), o seu volume fica duplicado.

08. Se uma esfera com volume igual a 288π cm^3 está inscrita num cilindro eqüilátero, então a altura do cilindro é 12cm.

40. (Pucsp) A tira seguinte mostra o Cebolinha tentando levantar um haltere, que é um aparelho feito de ferro, composto de duas esferas acopladas a um bastão cilíndrico.

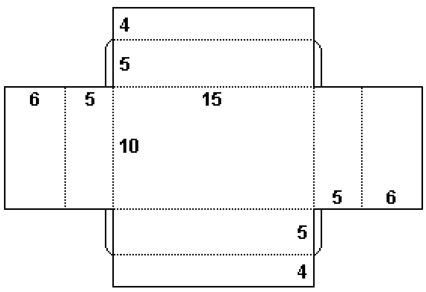
Suponha que cada esfera tenha 10,5cm de diâmetro e que o bastão tenha 50cm de comprimento e diâmetro da base medindo 1,4cm. Se a densidade do ferro é $7{,}8g/cm^3$, quantos quilogramas, aproximadamente, o Cebolinha tentava levantar? (Use: $\pi = 22/7$)
a) 18
b) 16
c) 15
d) 12
e) 10

41. (Ita) Considere a região do plano cartesiano xy definida pela desigualdade

$$x^2 + 4x + y^2 - 4y - 8 \leq 0.$$

Quando esta região rodar um ângulo de $\pi/6$ radianos em torno da reta $x + y = 0$, ela irá gerar um sólido de superfície externa total com área igual a
a) $128\pi/3$.
b) $128\pi/4$.
c) $128\pi/5$.
d) $128\pi/6$.
e) $128\pi/7$.

42. (Enem) Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.



Os sólidos são fabricados nas formas de

I. um cone reto de altura 1cm e raio da base 1,5cm.
II. um cubo de aresta 2cm.
III. uma esfera de raio 1,5cm.
IV. um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2cm, 3cm e 4cm.
V. um cilindro reto de altura 3cm e raio da base 1cm.

O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos

a) I, II e III.

b) I, II e V.

c) I, II, IV e V.

d) II, III, IV e V.

e) III, IV e V.

43. (Ufg) Um cubo de aresta l e uma esfera E estão dispostos de modo que cada aresta do cubo intercepta a superfície esférica de E em um único ponto.

Com base nessas informações, julgue os itens abaixo.

(   ) A interseção da esfera E com cada face do cubo determina um círculo de raio $r = l\sqrt{2}/2$.

(   ) O volume de esfera E é maior que o volume da esfera inscrita no cubo.

(   ) A medida do diâmetro da esfera E é igual a 2/3 da medida da diagonal do cubo.

(   ) A área da superfície da esfera E é igual à área da superfície do cubo.

44. (Pucpr) Tem-se um recipiente cilíndrico, de raio 3cm, com água. Se mergulharmos inteiramente uma bolinha esférica nesse recipiente, o nível da água sobe cerca de 1,2cm.

Sabe-se, então, que o raio da bolinha vale aproximadamente:

a) 1 cm

b) 1, 5 cm

c) 2 cm

d) 2,5 cm

e) 3 cm

45. (Ufrrj) Na famosa cidade de Sucupira, foi feito um monumento de concreto com pedestal em forma de uma esfera de raio igual a 5m, em homenagem ao anti-herói "Zeca Diabo".

O cidadão "Nézinho do Jegue" foi informado de que, apesar de o preço do metro cúbico do concreto ser 260 reais, o custo total do concreto do pedestal, feito com dinheiro público, foi de 500 mil reais. Nézinho do Jegue verificou, então, que houve um superfaturamento

a) menor que 50 mil reais.

b) entre 50 e 200 mil reais.

c) entre 200 e 300 mil reais.

d) entre 300 e 400 mil reais.

e) acima de 400 mil reais.Obs.: considere π =3,14

46. (Ufrs) O volume de uma esfera A é 1/8 do volume de uma esfera B. Se o raio da esfera B mede 10, então o raio da esfera A mede

a) 5.

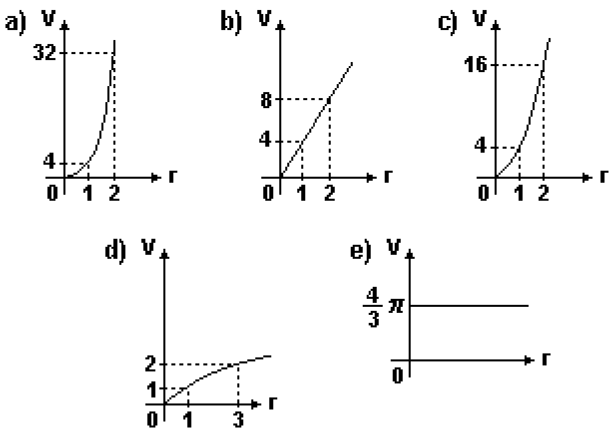
b) 4.

c) 2,5.

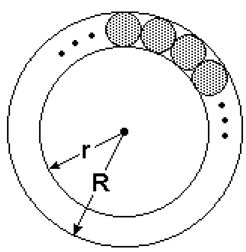
d) 2.

e) 1,25.

47. (Ufal) Sabe-se que o volume V de uma esfera de raio r é dado pela expressão $V=(4\pi r^3)/3$. Dos gráficos abaixo, aquele que mais se aproxima do gráfico do volume de uma esfera em função do seu raio é



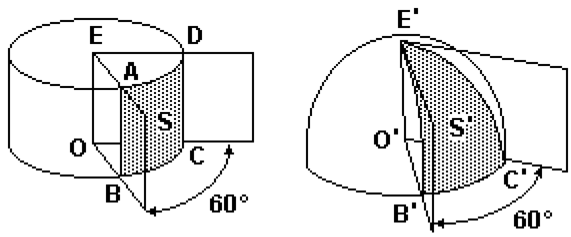
48. (Ufes) Deseja-se fabricar um rolimã encaixando-se, sem folga, n esferas iguais de raio 1cm entre dois anéis cilíndricos, tal como na figura.



a) É possível construir tal peça com o raio externo $R \leq 6{,}5$cm e 18 esferas? Use $\pi \approx 3{,}14$.

b) Calcule os raios r e R dos anéis em função de n.

49. (Uff) Considere duas superfícies S=ABCD e S'=E'B'C' obtidas, respectivamente, pelas interseções de um cilindro circular reto e de uma semi-esfera com semiplanos que formam um ângulo diedro de 60°, conforme as figuras a seguir.



.

Tem-se:
O - centro da base do cilindro
OE - altura do cilindro
OB - raio da base do cilindro
O'E' - raio da semi-esfera
OE = OB = O'E'

Sendo área(S) a área da superfície S e área(S') a área da superfície S', calcule o valor de área(S)/área(S').

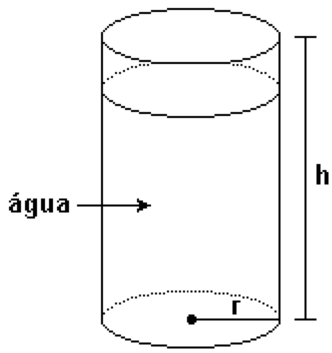
50. (Uerj) Considere a equação abaixo, que representa uma superfície esférica, para responder à questão.

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$

Determine a equação da circunferência obtida pela interseção da superfície acima e o plano coordenado XOY.

51. (Ufpe) Derretendo uma peça maciça de ouro de forma esférica, quantas peças da mesma forma se pode confeccionar com este ouro, se o raio das novas peças é um terço do raio da anterior? Admita que não houve perda de ouro durante o derretimento.
a) 3
b) 9
c) 18
d) 21
e) 27

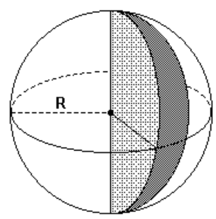
52. (Unifesp) Um recipiente, contendo água, tem a forma de um cilindro circular reto de altura h=50cm e raio r=15cm. Este recipiente contém 1 litro de água a menos que sua capacidade total.



a) Calcule o volume de água contido no cilindro (use $\pi = 3{,}14$).

b) Qual deve ser o raio R de uma esfera de ferro que, introduzida no cilindro e totalmente submersa, faça transbordarem exatamente 2 litros de água?

53. (Unesp) Uma quitanda vende fatias de melancia embaladas em plástico transparente. Uma melancia com forma esférica de raio de medida Rcm foi cortada em 12 fatias iguais, onde cada fatia tem a forma de uma cunha esférica, como representado na figura.



Sabendo-se que a área de uma superfície esférica de raio R cm é $4\pi R^2$ cm^2, determine, em função de π e de R:

a) a área da casca de cada fatia da melancia (fuso esférico);

b) quantos cm^2 de plástico foram necessários para embalar cada fatia (sem nenhuma perda e sem sobrepor camadas de plástico), ou seja, qual é a área da superfície total de cada fatia.

54. (Ufrj) Uma esfera de vidro, de diâmetro interno 10 cm, está cheia de bolas de gude perfeitamente esféricas, de raio 1cm.

Se n é o número de bolas de gude dentro da esfera, indique qual das opções a seguir é verdadeira:

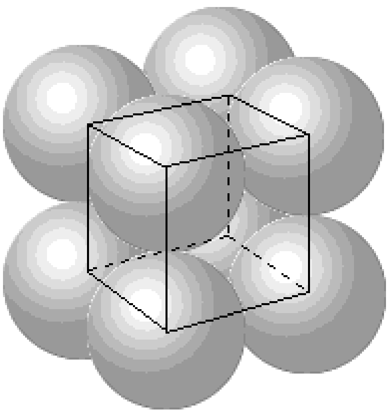
opção I $n > 125$

opção II $n = 125$

opção III $n < 125$

Justifique sua resposta.

55. (Ufrs) No desenho abaixo, em cada um dos vértices do cubo está centrada uma esfera cuja medida do diâmetro é igual à medida da aresta do cubo.



A razão entre o volume da porção do cubo ocupado pelas esferas e o volume do cubo é

a) $\pi/6$.

b) $\pi/5$.

c) $\pi/4$.

d) $\pi/3$.

e) $\pi/2$.

56. (Ita) A circunferência inscrita num triângulo eqüilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo.

Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)

a) $3\sqrt{3}$.

b) 6.

c) 5.

d) 4.

e) $2\sqrt{5}$.

57. (Ita) Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semi-esfera formam uma progressão aritmética de razão $\pi r^3/45$. Se o volume da menor cunha for igual a $\pi r^3/18$, então n é igual a

a) 4.

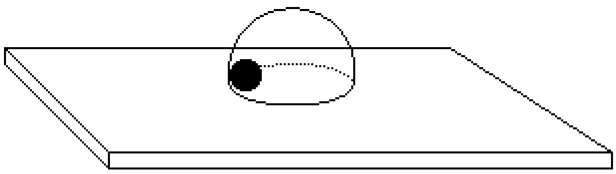
b) 3.

c) 6.

d) 5.

e) 7.

58. (Uerj) Uma cuba de superfície semi-esférica, com diâmetro de 8 cm, está fixada sobre uma mesa plana. Uma bola de gude de forma esférica, com raio igual a 1 cm, encontra-se sob essa cuba.



Desprezando a espessura do material usado para fabricar a cuba, determine:

a) a maior área, em cm^2, pela qual a bola de gude poderá se deslocar na superfície da mesa;

b) o volume, em cm^3, da maior esfera que poderia ser colocada embaixo dessa cuba.

GABARITO

1. V F V F V

2. Círculo de Raio = 2, com centro na origem do plano.

3. 9

4. Seja O o centro da esfera. Então AO = OP = r. Seja P' a projeção do segmento OP sobre a face F. Se denotarmos por x o comprimento do segmento OP', segue do Teorema de Pitágoras que $r^2 = x^2 + 50$. Como r + x = 10, temos $r^2 = (10 - r)^2 + 50 = 100 - 20r + r^2 + 50$. Portanto, 20r = 150 e r = 7, 5 cm.

5. [E]

6. [D]

7. O volume é $\pi x(y/2)^2 - 4/3\pi (y/2)^3 = \pi xy^2/4 - \pi y^3/6 = \pi y^2(3x - 2y)/12$.

8. [A]

9. a) r = R/2
b) 6 esferas.

10. [C]

11. [C]

12. [E]

13. [A]

14. b) OP = $(r.\sqrt{2})/2$

15. [D]

16. [E]

17. $36\pi/5 = 22,6$

18. [C]

19. a) 99/56 cm^3
b) 9,9 g

20. [C]

21. [C]

22. [C]

23. [E]

24. [C]

25. [B]

26. [D]

27. Raio da esfera menor = 1/2
Raio da esfera maior = 1

28. [A]

29. [E]

30. a) O Δ ABC é retângulo: $\overline{AB}^2 = m \cdot 2R \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{(2Rm)}$

b) Área plana do interior dessa circunferência de raio $\overline{AB}$ é dado por $\pi\,\overline{AB}^2$, então:
$\pi\,\overline{AB}^2 = \pi\,[\sqrt{(2Rm)}]^2 = \pi \cdot 2Rm = 2\pi Rm$

31. [D]

32. [E]

33. [A]

34. [C]

35. 30

36. a) $5 \cdot \sqrt[3]{(3/4\pi)}$ cm

b) R$ 7.512,00

37. [D]

38. a) V(frasco) = 32π cm^3 e V(gota) = $4\pi/375$ cm^3.

b) $8\pi/25$ cm^3 e 100 minutos.

39. 02 + 04 + 08 = 14

40. [E]

41. [A]

42. [C]

43. F V F F

44. [C]

45. [D]

46. [A]

47. [A]

48. a) Sim

b) $r = \text{cossec}(\pi/n) - 1$
$R = \text{cossec}(\pi/n) + 1$

49. 1

50. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 8$

51. [E]

52. a) 34,325 l
b) $\sqrt[3]{(9/4\pi)}$ dm

53. a) $\pi R^2/3$ cm^2
b) $4\pi R^2/3$ cm^2

54. Opção III.
Justificativa: Como o volume interno do recipiente é de $4.\pi.125/3$ cm^3 e o volume de cada bola é $4.\pi/3$ cm^3, o número de bolas é menor que 125, pois haverá espaços vazios entre as bolas.

55. [A]

56. [C]

57. [C]

58. a) 8π cm^2

b) $32\pi/3$ cm^3