Exercícios de Matemática
Determinantes - 2

1. (Ufpr 95) Considere a matriz $A = [a_{ij}]$, de ordem 4x4, cujos elementos são mostrado a seguir. a_{ij}=

$$\begin{cases} 1, \text{ se } i \neq j \\ 0, \text{ se } i = j \end{cases}$$

É correto afirmar que:

01) Na matriz A, o elemento a_{23} é igual ao elemento a_{32}.
02) Os elementos da diagonal principal da matriz A são todos nulos.
04) O determinante da matriz A é igual a - 4.
08) Se a matriz B é [1 -1 1 -1], então o produto B.A é a matriz -B.
16) Sendo I a matriz identidade de ordem 4, a matriz A+I possui todos os elementos iguais a 1.

2. (Fgv 2003) Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem 3 e O a matriz nula também de ordem 3. Assinale a alternativa correta:
a) Se A . B = O, então: A = O ou B = O
b) det(2 . A) = 2 det(A)
c) Se A . B = A . C, então B = C
d) A. (B . C) = (A . B) . C
e) det(A + B) = det(A) + det(B)

3. (Ita 2005) Sejam A e B matrizes 2 x 2 tais que AB = BA e que satisfazem à equação matricial $A^2 + 2AB - B = 0$. Se B é inversível, mostre que (a) $AB^{-1} = B^{-1}A$ e que (b) A é inversível

4. (Unitau 95) Sendo $B=(b_{ij})_{2x2}$, onde,

$$b_{ij}= \begin{cases} 1, \text{ se } i=j \\ -2ij, \text{ se } i<j \\ 3j, \text{ se } i>j \end{cases}$$

Calcule o det B :
a) 13.
b) - 25.
c) 25.
d) 20.
e) - 10.

5. (Ita 96) Considere A e B matrizes reais 2 × 2, arbitrárias. Das afirmações a seguir assinale a verdadeira. Justifique a afirmação verdadeira e dê exemplo para mostrar que cada uma das demais é falsa.
a) Se A é não nula então A possui inversa.
b) (AB) = A B
c) det (AB) = det (BA)
d) det A^2 = 2 det A
e) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

6. (Puccamp 95) Se A e B são matrizes quadradas de ordem 3 e tais que det A≠0 e det B≠0, então é correto afirmar que
a) $B = A^{-1} \longrightarrow$ det B = det A
b) $B = A \longrightarrow$ det B = det A
c) det A^2 = det $B^2 \longrightarrow$ det A = det B
d) det (A+B) = det A + det B
e) det (3A) = 3.det A

7. (Mackenzie 96) Se A é uma matriz quadrada de ordem n ≥ 2 com elementos

$$a_{ij}= \begin{cases} \cos (i + j)\pi, \text{ se } i = j \\ \text{sen } \pi \ i, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

então, qualquer que seja n, detA é sempre igual a:
a) n/2.
b) 1.
c) 0.
d) n^2.
e) $2n^2$.

8. (Mackenzie 96) Na igualdade:

$$\log_3 [\det (2.A^{-1})] = \log_{27} [\det (2A)^{-1}],$$

A é uma matriz quadrada de quinta ordem com determinante não nulo. Então det A vale:
a) 2^5.
b) 2^{10}.
c) 3^5.
d) 3^{10}.
e) 6^5.

9. (Puccamp 97) São dadas as matrizes $A=(a_{ij})_{2x2}$, onde $a_{ij}=2i-3j$, e $B=(b_{ij})_{2x2}$, onde

$$b_{ij}=\begin{cases} i + j \text{ se } i = j \\ i - j \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Nessas condições, se $X = (B - A)^2$, o determinante da matriz X é igual a

a) 224
b) 286
c) 294
d) 306
e) 324

10. (Pucmg 97) O termo geral da matriz $M_{2x\ 2}$ é $a_{ij} = 3i - 2j$. O valor do determinante de M é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

11. (Pucmg 97) M é uma matriz quadrada de ordem 3, e seu determinante é det(M)=2. O valor da expressão det(M)+det(2M)+det(3M) é:

a) 12
b) 15
c) 36
d) 54
e) 72

12. (Ufrs 97) Sendo $A = (a_{ij})_{nxn}$ uma matriz onde n é igual a 2 e $a_{ij} = i^2-j$, o determinante da matriz A é

a) -3
b) -1
c) 0
d) 1
e) 3

13. (Uel 98) Seja a matriz $A=(a_{ij})_{3x3}$, tal que

$$a_{ij}=\begin{cases} \log_2 x & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Se o determinante de A é igual a -27, o valor de x é

a) 1/8
b) 1/4
c) 1/2
d) 4
e) 8

14. (Ufsm 99) Sejam A e B matrizes reais quadradas de ordem n e 0 a matriz nula de ordem n. Então, a afirmativa correta é a seguinte:

a) Se A é a matriz transposta de A, então detA $\neq$det A.
b) Se det A$\neq$0, existe a matriz inversa A^{-1} e A^{-1}=1/(detA).(cofA) , onde cof A é a matriz dos cofatores de A.
c) Se A . B = 0, então A = 0 ou B = 0.
d) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.
e) Se k $\in$ R, então det (k A)=k det A, para todo k.

15. (Fuvest 2000) Se A é uma matriz 2$\times$2 inversível que satisfaz $A^2=2A$, então o determinante de A será:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

16. (Unicamp 2000) Seja A a matriz formada pelos coeficientes do sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda + 2 \\ x + \lambda y + z = \lambda + 2 \\ x + y + \lambda z = \lambda + 2 \end{cases}$$

a) Ache as raízes da equação: detA=0.

b) Ache a solução geral desse sistema para λ=-2.

17. (Ufsm 2000) Sejam A, B e C matrizes reais 3×3, tais que $A.B=C^{-1}$, $B=2A$ e det $C= 8$.
Então o valor do |det A| é
a) 1/16
b) 1/8
c) 1
d) 8
e) 16

18. (Unesp 2001) Considere a matriz $A = (a_{ij})_{2x2}$, definida por $a_{ij} = -1+2i+j$, para $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2$.
O determinante de A é:
a) 22.
b) 2.
c) 4.
d) -2.
e) -4.

19. (Fgv 2002) A é uma matriz quadrada de ordem 2 e det(A)=7. Nessas condições, det(3A) e det(A^{-1}) valem respectivamente:
a) 7 e -7
b) 21 e 1/7
c) 21 e -7
d) 63 e -7
e) 63 e 1/7

20. (Pucsp 2001) Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, tal que

$$a_{ij}= \begin{cases} \cos 7\pi/i \text{ se } i = j \\ \text{sen } 7\pi/j \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

O determinante da matriz A é igual a
a) - (√ 3/2)
b) - (1/2)
c) - 1
d) 1/2
e) (√ 3/2)

21. (Ufrrj 2001) Dada a matriz $A = (a_{ij})_{2x2}$, tal que

$a_{ij} = 2$, se $i < j$
$a_{ij} = 3i + j$, se $i \geq j$,

encontre o DETERMINANTE da matriz A .

22. (Fei 99) As faces de um cubo foram numeradas de 1 a 6, depois em cada face do cubo foi registrada uma matriz de ordem 2, com elementos definidos por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i + f & \text{se } i = j \\ j & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

onde f é o valor associado à face correspondente.

Qual o valor do determinante da matriz registrada na face 5?
a) 63
b) 61
c) 60
d) 6
e) 0

23. (Mackenzie 2001) Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de terceira ordem tal que

$a_{ij} = -3$, se $i = j$
$a_{ij} = 0$, se $i \neq j$

então o determinante de A vale:
a) -27
b) 27
c) 1/27
d) -1/27
e) zero

24. (Ufes 2001) Se A é uma matriz quadrada de ordem 3 com det(A)=3 e se k é um número real tal que det(kA)=192, então o valor de k é
a) 4
b) 8
c) 32
d) 64
e) 96

25. (Ufv 2002) Seja A uma matriz inversível de ordem 2. Se det(2A)=det(A^2), então o valor de det A é:
a) 3
b) 4
c) 2
d) 0
e) 1

26. (Ufc 2002) Sejam A e B matrizes 3×3 tais que detA = 3 e detB = 4. Então $\det(A \times 2B)$ é igual a:
a) 32
b) 48
c) 64
d) 80
e) 96

27. (Ufsm 2002) Seja A uma matriz 2 x 2 com determinante não-nulo. Se $\det A^2 = \det(A + A)$, então det A é
a) - 4
b) 1
c) 4
d) 8
e) 16

28. (Pucsp 2003) Indica-se por det A o determinante de uma matriz
quadrada A. Seja a matriz $A = (a_{ij})$, de ordem 2, em que

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{sen}[(\pi/4) \cdot (i + j)], \text{ se } i = j \\ \text{sen}[x \cdot (i - j)], \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Quantos números reais x, tais que $-2\pi < x < 2\pi$, satisfazem a sentença det A = 1/4?
a) 10
b) 8
c) 6
d) 4
e) 2

29. (Mackenzie 2003) Seja A uma matriz quadrada de ordem 2 com determinante maior que zero e A^{-1} a sua inversa. Se $16 \cdot \det A^{-1} = \det(2A)$, então o determinante de A vale:
a) 4
b) 6
c) 8
d) 2
e) 16

30. (Pucmg 2003) A matriz A é de quarta ordem, e seu determinante é -8. Na equação det(2A) = 2x -150, o valor de x é:
a) 11
b) 16
c) 43
d) 67

31. (Ufsm 2003) Sejam A e B matrizes reais quadradas de ordem n. Se det A = det B $\neq$ 0, então $\det[(1/2) \cdot A \cdot B^{-1}]$ é igual a
a) $1/(2^n)$
b) 1/2
c) (1/2) . det A
d) $[1/(2^n)]$. det A
e) 2^n

32. (Ita 2004) Considere as afirmações dadas a seguir, em que A é uma matriz quadrada $n \times n$, $n \geq 2$:
I. O determinante de A é nulo se, e somente se, A possui uma linha ou uma coluna nula.
II. Se $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$, com i, j = 1,2,...,n, então $\det A = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.
III. Se B for obtida de A, multiplicando-se a primeira coluna por $(\sqrt{2}) + 1$ e a segunda por $(\sqrt{2}) - 1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então det B = det A.
Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s)
a) apenas II.
b) apenas III.
c) apenas I e II.
d) apenas II e III.
e) todas.

33. (Ufv 2004) Na matriz quadrada A = (aij) de ordem 2, os elementos a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22}, nesta ordem, apresentam a seguinte propriedade: "Os três primeiros estão em progressão aritmética e os três últimos em progressão geométrica, ambas de mesma razão". Se $a_{12} = 2$, o determinante de A vale:
a) -8
b) 8
c) 0
d) -4
e) 4

34. (Ufscar 2005) Seja A = (a_{ij}) uma matriz quadrada de ordem 3 tal que,

$$a_{ij} = \begin{cases} p, \text{ se } i = j \\ 2p, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

com p inteiro positivo. Em tais condições, é correto afirmar que, necessariamente, det A é múltiplo de

a) 2.
b) 3.
c) 5.
d) 7.
e) 11.

GABARITO

1. 01 + 02 + 08 + 16 = 27

2. [D]

3. a) Se B é inversível, temos:

$AB = BA \Leftrightarrow AB \,.\, B^{-1} = BA \,.\, B^{-1} \Leftrightarrow$

$A = BA \,.\, B^{-1} \Leftrightarrow B^{-1} \,.\, A = B^{-1} . BA \,.\, B^{-1} \Leftrightarrow$

$B^{-1} \,.\, A = A \,.\, B^{-1}$

c.q.d.

b) Como A e B comutam, tem-se:

$A^2 + 2AB - B = 0 \Leftrightarrow B = A(A + 2B)$

Aplicando determinantes em ambos os membros, obtemos:

$\det B = \det [\, A\,(A+2B)\,] \Leftrightarrow$

$\det B = \det A \,.\, \det (A+2B)$

Como B é inversível, $\det B = k$, $k \neq 0$.

Supondo que A não é inversível, isto é, $\det A = 0$, temos:

$k = 0 \,.\, \det (A+2B) \Leftrightarrow k = 0$

O que é uma contradição, pois $k \neq 0$.

Portanto, A é inversível.

c.q.d.

4. [A]

5. [C]

6. [B]

7. [B]

8. [B]

9. [E]

10. [E]

11. [E]

12. [E]

13. [A]

14. [B]

15. [E]

16. a) 1 e - 2

b) $V = \{(\alpha\,;\, \alpha\,;\, \alpha)\}\ \forall\ \alpha \in R$

17. [B]

18. [D]

19. [E]

20. [A]

21. det (A) = 18

22. [B]

23. [A]

24. [A]

25. [B]

26. [E]

27. [C]

28. [B]

29. [D]

30. [A]

31. [A]

32. [D]

33. [A]

34. [C]