Resumo Teórico – Função Exponencial

Definição (potência com expoente natural)
Dados $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$b^0 = 1$$
$$b^1 = b$$
$$b^n = \underbrace{b \ldots b}_{n \text{ vezes}}$$

Exemplo

$$3^0 = 1$$
$$3^1 = 3$$
$$3^2 = 9$$

Observação

$$-3^2 = -9$$
$$(-3)^2 = 9$$

Observação

0^0 é indeterminação

Definição (potência com expoente inteiro)
Dados $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

Exemplo

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Definição (potência com expoente racional)
Dados $b > 0$ e o número racional $\frac{m}{n}$, definimos

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$$

Exemplo

$$2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4}$$

$$\sqrt[3]{2^4} = \mathrm{x}$$

$$2^4 = \mathrm{x}^3$$

$$\mathrm{x} \approx 2{,}52$$

Potência com expoente irracional
Para calcular uma potência com expoente irracional, tomamos aproximações do expoente.

Exemplo
Para calcular $5^{\sqrt{2}}$, utilizamos aproximações cada vez melhores de $\sqrt{2} = 1{,}414213 \ldots$

$[5^{1,4}, 5^{1,5}]$	[9,5; 11,1]
$[5^{1,41}, 5^{1,42}]$	[9,67; 9,82]
$[5^{1,414}, 5^{1,415}]$	[9,735; 9,750]

Propriedades

a) $b^{n+m} = b^n . b^m$

b) $b^{n-m} = \frac{b^n}{b^m}$

Exemplo

$$2^3 . 2^4 = (2.2.2).(2.2.2.2) = 2^7$$
$$\frac{2^3}{2^4} = \frac{2.2.2}{2.2.2.2} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

c) $(b^n)^m = b^{nm}$

d) $(a.b)^C = a^C b^C$

e) $\left(\frac{a}{b}\right)^C = \frac{a^C}{b^C}$

Exemplo

$$(5^2)^3 = 5^2.5^2.5^2 = 5^6$$

$$(2.3)^2 = (2.3)(2.3) = 2^2 3^2$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5}{4}.\frac{5}{4}.\frac{5}{4} = \frac{5^3}{4^3}$$

Potência de base 10

$$10^{-3} = 0{,}001$$
$$10^{-2} = 0{,}01$$
$$10^{-1} = 0{,}1$$
$$10^0 = 1$$
$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 100$$
$$10^3 = 1000$$

Observação
A expressão $b^{\frac{m}{n}}$ nem sempre é um número real.

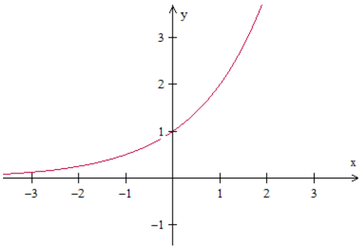
$$(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$$

Observação

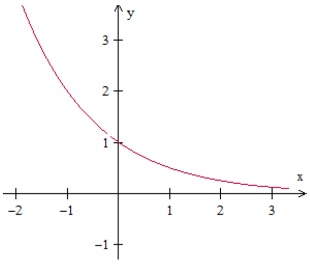
$1^{\mathrm{x}} = 1$ para todo $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$.

Definição (função exponencial)
Dado $b > 0$ e $b \neq 1$, definimos a função exponencial
$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ por $f(x) = b^x$.

Gráfico da função exponencial

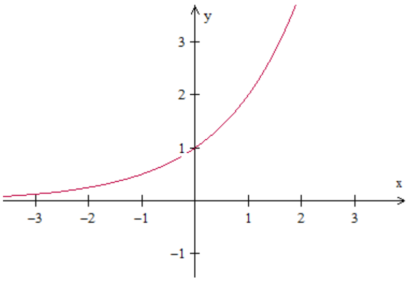


$y = b^x$, b > 1
função crescente



$y = b^x$, b > 1
função decrescente

Exemplos



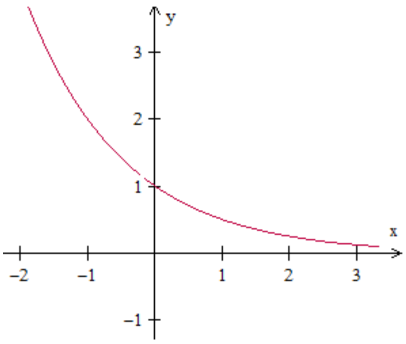
$(2)^{-2} = \frac{1}{4}$

$(2)^{-1} = \frac{1}{2}$

$(2)^0 = 1$

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$



$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

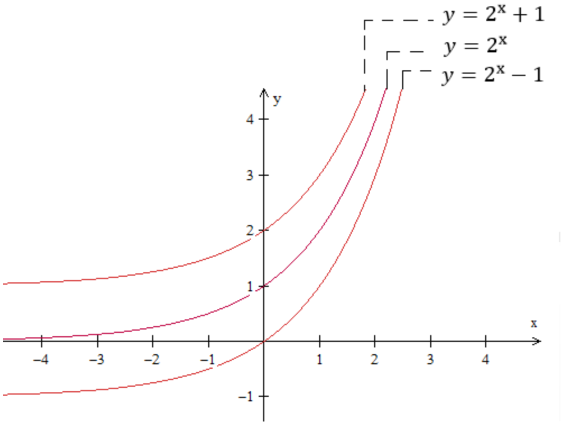
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$

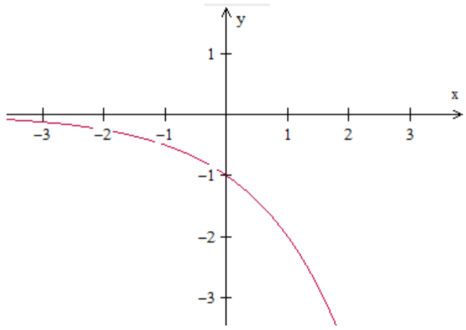
$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$

Exemplo



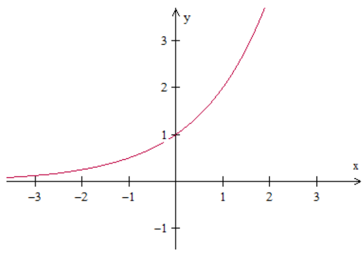
Exemplo



$y = -2^x$

Equações exponenciais

<u>Observação</u>
A função exponencial é injetora e, por isso, se $b^{x_1} = b^{x_2}$ então $x_1 = x_2$.



Exemplo
Resolva $2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4$
(resposta)

Exemplo
Resolva $3^x = \frac{1}{27}$

$3^x = 3^{-3}$

$x = -3$
(resposta)

Exemplo
Resolva $5^{x+2} = 1$

$5^{x+2} = 5^0$

$x + 2 = 0$

$x = -2$
(resposta)

Exemplo
Resolva $4^{x+2} = 8$

$2^{2(x+2)} = 2^3$

$2(x + 2) = 3$

$2x + 4 = 3$

$2x = 3 - 4$

$x = -\frac{1}{2}$
(resposta)

Exemplo
Resolva $3^{x+1} + 3^{x+2} = 36$

$3^x.3 + 3^x3^2 = 36$

$3^x(3 + 9) = 36$

$3^x = 3$

$x = 1$
(resposta)

Exemplo
Resolva $4^x - 2^x - 2 = 0$

$(2^x)^2 - 2^x - 2 = 0$

$y^2 - y - 2 = 0$

$y_1 = 2$ $\qquad\qquad$ $y_2 = -1$

$2^x = 2$

$x = 1$ $\qquad\qquad$ (resposta)