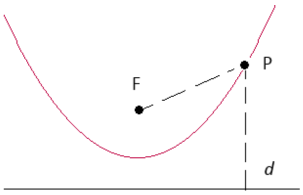
Resumo Teórico – Função Quadrática

Definição
Dizemos que f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função quadrática se existem constantes *a*, *b*, *c* $\in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

<u>Observação</u>
É comum chamar uma função quadrática de função do 2º grau.

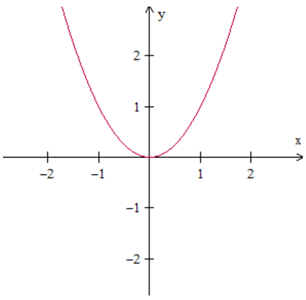
Definição
Uma parábola é o conjunto de todos os pontos *P* do plano que são equidistantes de uma reta *d* (diretriz) e de um ponto F (foco) que não está na reta.

d(P, *d*) = d(P, F)



Proposição
O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com diretriz paralela ao eixo dos *x*.

Exemplo

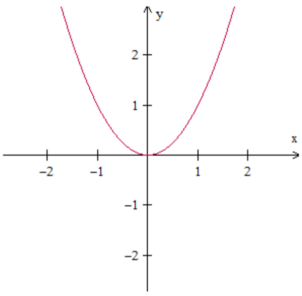
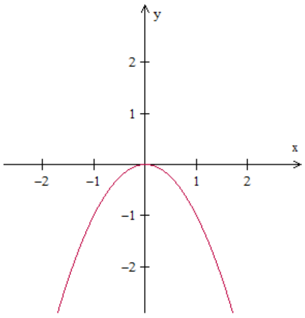


Estudo dos coeficientes *a*, *b* e *c*

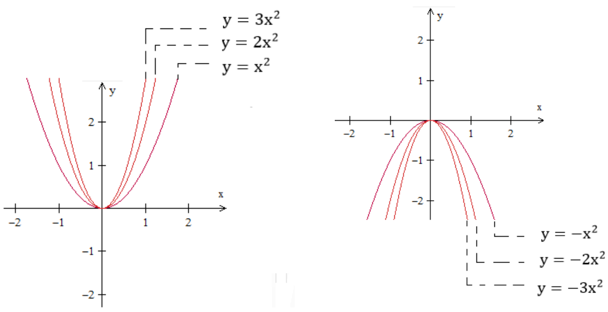
Se *a* > 0, a parábola tem concavidade para cima.
Se *a* < 0, a parábola tem concavidade para baixo.

Exemplo

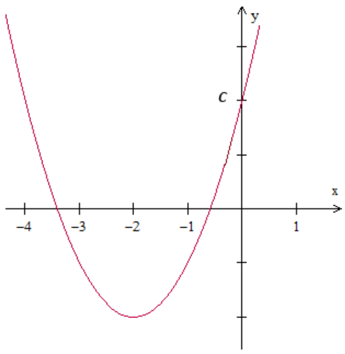
$y = x^2$ $\qquad\qquad$ $y = -x^2$

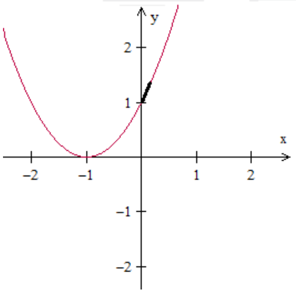
<u>Observação</u>
Todas as parábolas são iguais, todavia, quanto maior |*a*|, mais fechada ela parece ser.

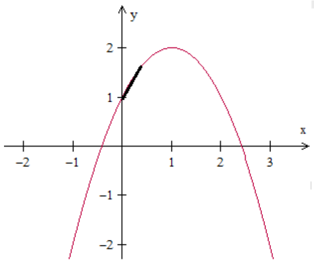


c = *f*(0) é a ordenada do ponto em que o gráfico da função intersecta o eixo dos y.

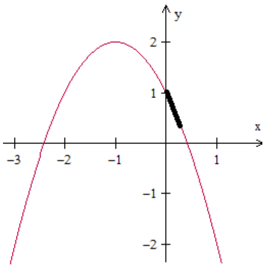


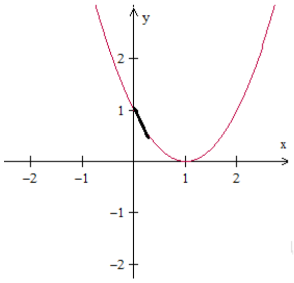
Se $b > 0$, logo após intersectar o eixo dos y, a parábola cresce



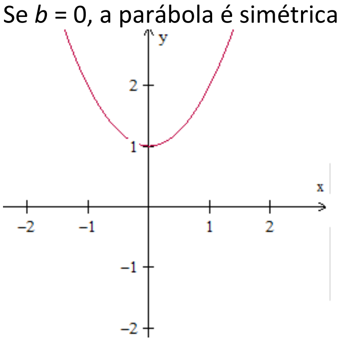


Se $b > 0$ logo após intersectar o eixo dos y, a parábola decresce.





Se $b = 0$, a parábola é simétrica em relação ao eixo y.



Raízes da equação

Se $ax^2 + bx + c = 0$, então

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemplo

Encontre as raízes reais de cada equação.

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.3}}{2.1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$

b) $-x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2}$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 1$$

c) $x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.1}}{2.1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Não tem raízes reais

d) $2x^2 + 3x = 0$

$$x(2x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{3}{2}$$

e) $x^2 - 9 = 0$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$$

Observação

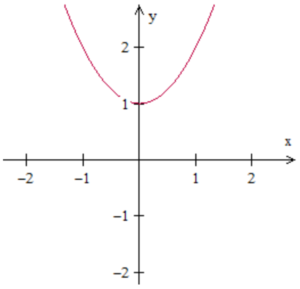
O matemático indiano Bhaskara (1114 – 1185) escreveu o livro “Bijaganita” no qual estudou o cálculo de raízes, mas não parece ter encontrado o que se chama de fórmula de Bhaskara. Aliás, apenas no Brasil a fórmula tem esse nome, sendo chamada de fórmula resolutiva nos outros locais.

Observação

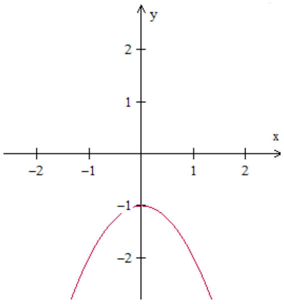
O *discriminante* da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é o número $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Se $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas.
- Se $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais iguais.
- Se $\Delta < 0$, a equação tem duas raízes imaginárias.

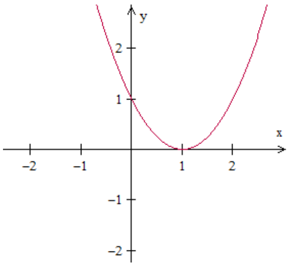
$\Delta < 0$, $a > 0$



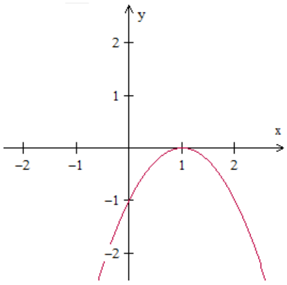
$\Delta < 0$, $a < 0$



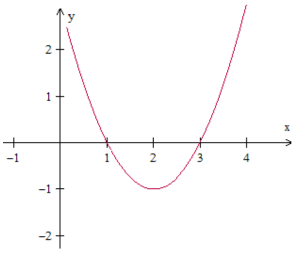
$\Delta = 0$, $a > 0$



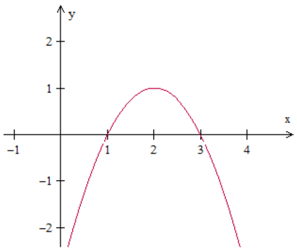
$\Delta < 0$, $a < 0$



$\Delta > 0$, $a > 0$



$\Delta > 0$, $a < 0$



Fatoração

Se $f(\mathrm{x}) = ax^2 + bx + c$ tem raízes x_1 e x_2, então

$$f(\mathrm{x}) = a(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_2)$$

Exemplo

$f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 3$ tem raízes $\mathrm{x}_1 = 1$ e $\mathrm{x}_2 = 3$, logo

$$f(\mathrm{x}) = (\mathrm{x} - 1)(\mathrm{x} - 3)$$

Cálculo de raízes por soma e produto

$$f(\mathrm{x}) = ax^2 + bx + c$$

$$= a(\mathrm{x} - \mathrm{x}_1)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_2)$$

$$= ax^2 - a(\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2)\mathrm{x} + a\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$$

Com isso,

$$b = -a(\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2)$$

$$-\frac{b}{a} = \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2$$

e também

$$c = a\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$$

$$\frac{c}{a} = \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$$

Podemos usar esse fato para encontrar as raízes de uma função quadrática.

Exemplo

Dada $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} + 6$, procuramos dois números cujo produto seja 6.

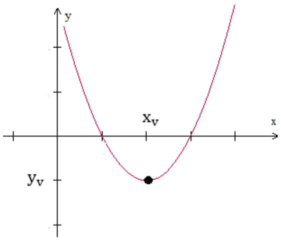
1 e 6	2 e 3
– 1 e – 6	– 2 e – 3

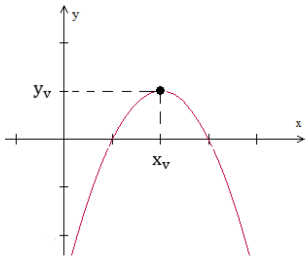
As raízes são o par que tiver soma – 5, ou seja, – 2 e – 3.

Vértice da parábola

O vértice da parábola $f(\mathrm{x}) = a\mathrm{x}^2 + b\mathrm{x} + c$ é o ponto $\mathrm{V}(\mathrm{x_v}, \mathrm{y_v})$ com

$$\mathrm{x_v} = -\frac{b}{2a} \qquad \mathrm{y_v} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$





<u>Observação</u>

- Se conhecermos as raízes da função, o $\mathrm{x_v}$ é a média desses valores.
- Em exercícios, pode ser mais fácil calcular $\mathrm{y_v} = f(\mathrm{x_v})$ do que usar a fórmula para $\mathrm{y_v}$.

Exemplo

Determine o vértice da parábola $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + 3$.

Resolução

$$\mathrm{x_v} = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2.1} = 2$$

$$\mathrm{y_v} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4.1.3}{4} = -1$$

Ou ainda, essa função tem raízes $\mathrm{x}_1 = 1$ e $\mathrm{x}_2 = 3$, logo

$$\mathrm{x_v} = \frac{\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2}{2} = 2$$

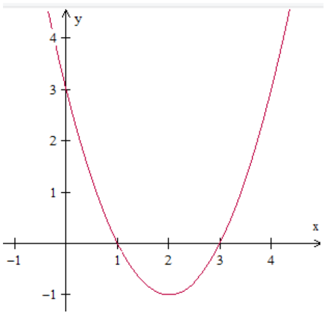
$$\mathrm{y_v} = f(2) = 2^2 - 4.2 + 3 = -1$$

O vértice é V(2, – 1) (resposta)

Exemplo

Esboce as parábolas.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

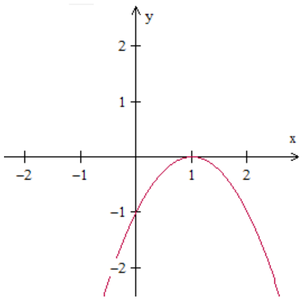


$f(0) = 3$

raízes: $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$

vértice $V(2, -1)$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

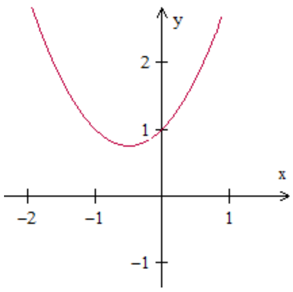


$f(0) = -1$

raízes: $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$

vértice $V(1, 0)$

c) $f(x) = x^2 + x + 1$



$f(0) = -1$

raízes: imaginárias

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

$$y_v = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$