Filipe Rodrigues de S. Moreira
Graduando em Engenharia Mecânica –
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)
(Fevereiro 2005)

Trigonometria

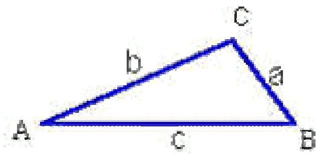
Capítulo I. Um pouco de História

A palavra trigonometria tem origem na Grécia da palavra trigonos (triângulo) + metrûm (medida). Etimologicamente, trigonometria significa medida de triângulos.

Por vezes pensa-se que a origem da Trigonometria está exclusivamente ligada à resolução de situações de medição de terrenos ou determinação de medidas sobre a superfície da terra. No entanto, enquanto ramo do conhecimento científico, é impossível separar a Trigonometria da Astronomia. Daí que o seu desenvolvimento como ciência exata viesse a exigir medições e cálculos de grande precisão. É neste contexto que o astrônomo grego Hiparco de Niceia (180-125 a.C.) é considerado o fundador da Trigonometria. Foi ele que introduziu as medidas sexagesimais em Astronomia e elaborou a primeira tabela trigonométrica. Hiparco utilizou a trigonometria para fazer medições, prever eclipses, fazer calendários e na navegação. A Hiparco seguiram-se outros no estudo e desenvolvimento da trigonometria, como, por exemplo, Ptolomeu.

No séc.III, os indianos e os árabes deram nova dimensão à trigonometria ao introduzirem a trigonometria esférica. A Trigonometria tem como objetivo principal o estudo das relações entre lados e ângulos de um triângulo e constitui instrumento indispensável na resposta a necessidades da Astronomia e ainda da navegação, cartografia e da topografia. O estabelecimento de certas relações que hoje chamamos *fórmulas fundamentais da Trigonometria* deve-se aos matemáticos hindus, do séc. V ao séc. XII. De entre eles destaca-se Aryabhata (séc.VI), um astrônomo indiano, tendo já nesta altura associado o seno de um ângulo ao centro à medida da corda correspondente e elaborado também uma tábua de valores do seno. Matemáticos árabes, depois de traduzirem as obras deixadas pelos hindus, desenvolveram o estudo das razões trigonométricas em triângulos retângulos e estabeleceram, para qualquer triângulo, o chamado teorema ou *lei dos senos*.

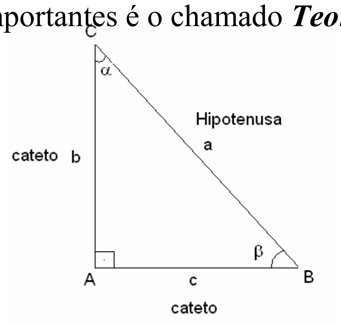
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$



A trigonometria começa a afirmar-se como ciência autônoma a partir do séc.XI quando Al-Biurine reúne todas as demonstrações, quer de origem grega, quer de origem indiana, até então conhecidas e usadas em Trigonometria. Deve-se ainda aos árabes a introdução desta ciência na Europa Ocidental. Na Europa, a instituição da Trigonometria como ciência autônoma em relação à Astronomia, é iniciada através da tradução e publicação dos manuscritos clássicos, bem como da elaboração de uma introdução completa à Trigonometria, e ficou a dever-se a Johaness Müller, um astrônomo prussiano, mais conhecido por Regiomontano(1436-1476).A obra de Regiomontano continha, por exemplo, a "Lei dos senos" aplicada a triângulos esféricos. No séc.XVI, François Viète (1540-1603) estabeleceu várias relações trigonométricas tendo-as associado às soluções de equações do 3ºgrau - é a ligação da trigonometria à Álgebra. Viète introduziu novos teoremas que permitiram relacionar lados e ângulos de triângulos não retângulos. Neper e Briggs usaram o cálculo logarítmico para estabelecerem novas fórmulas trigonométricas (séc.XVII). No séc.XIX, a trigonometria atinge o seu ponto máximo, ficando ligada à análise através das séries. Hoje, a trigonometria usa-se em muitas situações, nomeadamente na física.

Capítulo II. O Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo é construído utilizando-se dois lados perpendiculares entre si chamados catetos e um outro lado chamado hipotenusa. A partir dessa construção muitos teoremas importantíssimos foram construídos e um dos mais importantes é o chamado ***Teorema de Pitágoras***.



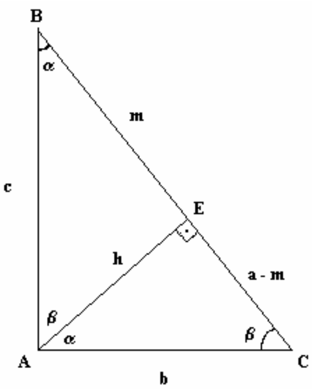
$\alpha + \beta = 90º$

II.1 – O Teorema de Pitágoras

Esse talvez seja o principal teorema que expressa uma relação métrica para os lados de um triângulo retângulo.

"O quadrado da medida da hipotenusa de um triangulo retângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos".

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$



Veja que na figura ao lado, há uma série de semelhanças de triângulos.

$\Delta BEA \approx \Delta CAE \approx \Delta ABC$. Com isso conseguimos algumas relações entre elas:

$\frac{h}{c} = \frac{b}{a} \Rightarrow h = \frac{bc}{a}$. Também temos que: $\frac{a-m}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = a^2 - am$ (I)

Uma terceira relação é dada por $\frac{m}{c} = \frac{h}{b} \Rightarrow m = \frac{ch}{b}$. Como $h = \frac{bc}{a}$, temos que:

$m = \frac{c}{b}.\frac{bc}{a} = \frac{c^2}{a}$. Substituindo o valor de m na equação (I) vem:

$a^2 = b^2 + c^2$ ***Teorema de Pitágoras***

II-) Relações trigonométricas no triângulo retângulo

Tendo como base o triângulo retângulo da fig.1, podemos definir algumas relações que envolvem os ângulos do triângulo retângulo. São elas o seno, o cosseno e a tangente. Definimos essas linhas trigonométricas da seguinte forma:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cat.\ oposto\ à\ \alpha}{hipotenusa} \quad \cos\alpha = \frac{cat.\ ajacente\ à\ \alpha}{hipotenusa} \quad \tan\alpha = \frac{cat.\ oposto\ à\ \alpha}{cat.\ ajacente\ à\ \alpha}$$

Da figura:

ângulos	***sen***	***cos***	***tan***
α	$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a}$	$\cos\alpha = \frac{b}{a}$	$\tan\alpha = \frac{c}{b}$
β	$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}$	$\cos\beta = \frac{c}{a}$	$\tan\beta = \frac{b}{c}$

Repare que para quaisquer α e β $sen\alpha = \cos\beta$ e $sen\beta = \cos\alpha$ assim, tiramos uma das relações mais importantes da Trigonometria:

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \cos(90 - \alpha)}$$

"O seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar"

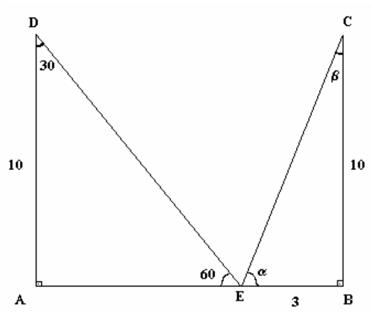
Existem alguns ângulos notáveis e é necessário que todo pré-vestibulando conheça o seno o cosseno e a tangente desses arcos. Veja a tabela abaixo:

Ângulos	0º	30°	45°	60°	90°
seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cosseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

Praticando!!!!

Nível I

P1-) Dados as figuras abaixo, determine o que se pede:



a) o valor de AE;
b) o valor de CE;
c) o valor de DE;
d) o valor de $sen\alpha, \cos\alpha, tg\alpha$;
e) o valor de $sen\beta, \cos\beta, tg\beta$;

P2-) Dados os grupos de três números abaixo, diga quais desses não podem representar lados de triângulos retângulos.

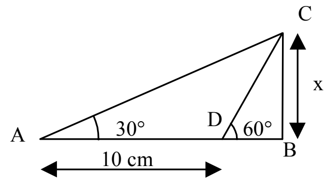
a-) 2,3 e 4   b-) 3, 4 e 5   c-) 6, 7 e 8   d-) 1, $\sqrt{3}$ e 2   e-) 2, $\sqrt{60}$, 8   f-) 6, 8, 10

P3-) Uma mulher sobe numa mesa quando vê um rato no chão. A altura da mesa é de 50 cm e a altura da mulher é de 1,50 m. O rato se encontra parado, rindo da cara dela, à 5 metros da mesa. Calcule a distância dos olhos da mulher ao rato.

P4-) Um poste de luz de 5 metros de altura produz uma sombra no chão de 8 metros. Qual a distância da ponta do poste à ponta da sombra deste no chão?

P5-) A figura mostra a posição de um avião observado a partir de dois pontos, A e B, localizados no solo e distantes 1 Km um do outro. Sabe-se que, nesse instante, o avião dista, respectivamente, $\sqrt{88}$ km e 9km, dos pontos A e B. Nessas condições, determine a altura do avião, em relação ao solo, no instante considerado.

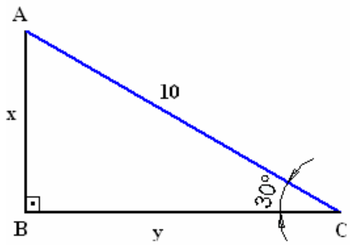
P6-) (FUVEST) Na figura a seguir o ângulo do vértice B é reto, quanto vale x?



P7-) Calcule o valor da expressão abaixo:

$$I = \frac{(sen^2 1).(sen^2 2).(sen^2 3)....(sen^2 89).(sen^2 90)}{(\cos^2 0).(\cos^2 1).(\cos^2 2)...(\cos^2 88).(\cos^2 89)}$$

P8-) Dado o triângulo retângulo ABC. O valor de x + y é:



a) $5-\sqrt{3}$ b) $5+\sqrt{3}$ c) $5(1-\sqrt{3})$
d) $5(1+\sqrt{3})$ e) $3-\sqrt{3}$

P9-) Uma roda de bicicleta tem 40cm de diâmtero. Quantas voltas completas ela dá em 1km ?

Gabarito

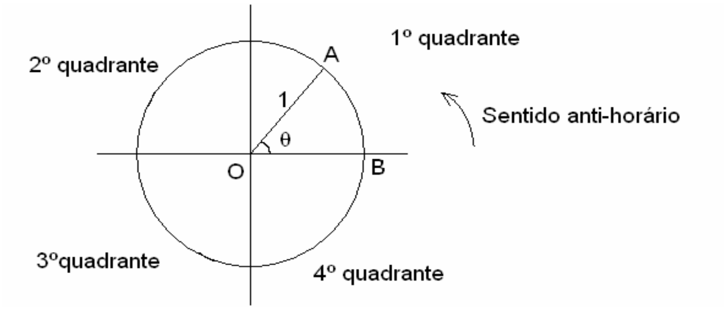
P1)(a) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ (b) $\sqrt{109}$ (c) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ (d) $sen\alpha = \frac{10\sqrt{109}}{109}$ $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{109}}{109}$ $tg\alpha = \frac{10}{3}$ (e) $sen\beta = \frac{3\sqrt{109}}{109}$ $\cos\beta = \frac{10\sqrt{109}}{109}$ $tg\beta = \frac{3}{10}$

P2) a, c   P3) $d=\sqrt{29}$ P4) $d=\sqrt{89}$
P5) $H = 6\sqrt{2}$ P6) $x = 5\sqrt{3}$ P7)1
P8) d   P9) 795

Capítulo III. Círculo Trigonométrico

A circunferência trigonométrica é de extrema importância para o nosso estudo da Trigonometria, pois é baseado nela que todos os teoremas serão deduzidos.

Trata-se de uma circunferência com ***centro na origem*** do sistema de eixos coordenados e de ***raio 1***, como é mostrado na figura abaixo:



Os eixos dividem a circunferência em 4 partes iguais denominados quadrantes.
Convenciona-se que o sentido anti-horário é o sentido positivo na circunferência trigonométrica.

III.1 – Ângulo central

Qualquer ângulo cujo vértice é o centro da circunferência chamamos de ângulo central. Como exemplo temos o ângulo (AÔB).

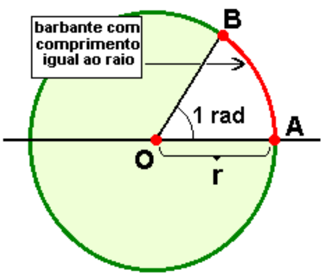
III.2 – Unidades de medidas de ângulos;

Existem algumas unidades conhecidas com as quais podemos medir um ângulo. A mais conhecida é o ***grau***, mas há algumas outras que podem aparecer no nosso vestibular!!!! Vamos entender como cada uma dessas unidades foram definidas.

- **Grau:** Dividindo uma circunferência em 360 partes iguais, ligamos o centro a cada um desses pontos marcados nessa circunferência. Com essa operação conseguimos determinar 360 ângulos centrais. Cada um desses ângulos é chamado de 1 grau.

- **Grado:** Da mesma forma que foi feita a definição de um grau, faremos para definir um grado. A única diferença entre essas medidas é que para o grau dividimos a circunferência em 360 arcos iguais e para o grado dividiremos essa mesma circunferência em 400 partes iguais.

- **Radiano:** Outra unidade é chamada de radiano. Essa é uma das mais importantes e é a que mais faremos uso no nosso curso de trigonometria. Sejamos práticos: Desenhamos no chão uma circunferência de raio r. Agora fazemos uma formiga andar sobre essa circunferência (sobre a curva) o equivalente à r. Marcamos o lugar que ela pára. Agora marcamos o ângulo central que corresponde à esse arco que a formiga andou. Esse ângulo central formado mede 1 radiano (1 rd).



Faça a seguinte experiência!!!!

1. Com o auxílio de um compasso, desenhe uma circunferência de raio **R** = 10cm.
2. Pegue um pedaço de barbante e cubra essa circunferência por inteiro.
3. Estique esse barbante e meça o seu tamanho (**L**) com uma régua.

4. Calcule o valor da razão expressa por $k = \frac{L}{R}$.
5. Anote o resultado em uma tabela.
6. Repita esse procedimento para circunferências de raios 5cm e 8cm.
7. Compare a sua tabela com a tabela abaixo.

R = 10cm	$k = \frac{L}{R}$	**R = 8cm**	$k = \frac{L}{R}$	**R = 5cm**	$k = \frac{L}{R}$
L = 62,8cm	≈6,28	L = 50,4 cm	≈6,28	L = 31,4cm	≈6,28

Repare que não importa o valor de R que você use, quando você calcular o valor de $k = \frac{L}{R}$ o resultado surpreendentemente, é sempre o mesmo e aproximadamente igual à 6,28. Essa constante pode ser calculada com exatidão, mas para isso é necessário o uso de uma matemática mais pesada, essa constante chamamos de 2π. Assim, o comprimento de qualquer circunferência é dado por $L = 2\pi R$.

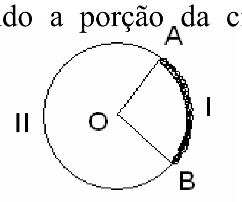
No caso do nosso estudo, o raio vale 1 por definição. Assim, a nossa circunferência mede 2π.
Como foi dito acima, 1(um) radiano é o valor de um ângulo que equivale à um arco que mede r (no nosso caso r = 1). Como nossa circunferência mede 2π, cabem nela 2π radianos. Assim, dizemos que na circunferência inteira temos:

360°* ....equivale à............*2π radianos*........... que equivale à...........*400 grados

Para efeito de conversões, temos a seguinte relação: $180^o \equiv \pi\ rad \equiv 200gd$

<u>III.3 – Arcos</u>

Quando marcamos dois pontos A, B sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes. Podemos ainda definir arco como sendo a porção da circunferência delimitada por um ângulo central qualquer. Veja!!!!



Tanto a parte I como a parte II são chamadas de arcos de circunferência. Se A coincide com B, diz-se que temos o arco nulo (I) e o arco de volta inteira (II).
Muito importante: *se não for mencionado qual dos arcos se está falando, assume-se que trata-se do menor arco.*

<u>III.4 – Unidades de medidas de arcos</u>

Vamos medir um arco:

Acabamos de ver que para qualquer circunferência, o seu comprimento é dado pela expressão: $C = 2\pi R$. Vamos achar uma expressão que dá o comprimento de um arco sobre uma circunferência de raio R. Vamos usar uma regra de três:

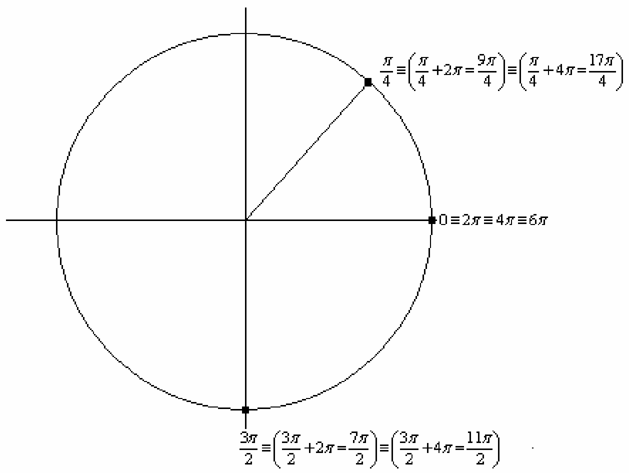
$$\begin{array}{lcl} 2\pi R & \_\_\_\_\_ & 2\pi \\ c & \_\_\_\_\_ & \theta \end{array} \Rightarrow c = R\theta$$, em que c é o comprimento do arco.

OBS.: No caso da circunferência trigonométrica, por definição, ela tem raio 1, logo a expressão acima fica reduzida à: $c = \theta$

III.5 – Expressão geral dos arcos

Imagine a seguinte situação: estamos caminhando sobre uma pista circular, logo, sairemos de um marco zero e vamos prosseguindo de tal forma que num determinado momento chegamos o mesmo ponto de partida. A posição (sobre a pista circular) é a mesma daquela que começamos a caminhada, porém os arcos são diferentes, pois no início não tínhamos andado nada e agora temos um segundo arco que vale 2π. Veja a figura:

Quando acontecem de termos dois arcos diferentes que terminam na mesma posição da circunferência, dizemos que esses arcos são arcos côngruos.



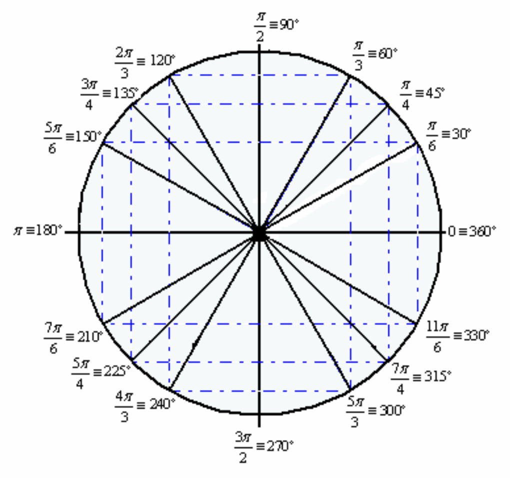
Ex.: $\frac{\pi}{4}$ *e* $\frac{9\pi}{4}$ são côngruos.

$\frac{3\pi}{2}$ *e* $\frac{7\pi}{2}$ são côngruos.

Assim, podemos ver que qualquer arco β é côngruo com outros infinitos arcos definidos pela soma de β com múltiplos de 2π, ou seja, se estamos sobre o arco β e andamos mais 2π sobre a circunferência voltamos para a mesma posição e se andarmos mais 2π voltamos novamente para a mesma posição original e se formos andando mais múltiplos de 2π estaremos sempre voltando para a mesma posição assim, podemos escrever que qualquer arco côngruo de β é da forma:

$$\boxed{AB = \beta + k(2\pi),\ k \in Z}.$$

│k│ é o número de voltas e o sinal de k indica o sentido (horário-negativo ou anti-horário-positivo) do giro.
Apresentamos abaixo a figura da circunferência trigonométrica em que são evidenciados os ângulos mais notáveis expressos em radianos e em graus.



Praticando!!!!

Nível I

P1-) Determine os menores arcos côngruos dos arcos mostrados abaixo bem como quantas voltas na circunferência foram dadas para que cada um desses arcos fossem gerados.

a-) 3000º b-) 5200º c-) $\frac{760\pi}{3}$

d-) $\frac{29\pi}{5}$ e-) 20000º f-) $\frac{2956\pi}{5}$

g-) 720º

P2-) Para cada caso abaixo faça a conversão do sistema dado para o indicado.

a-)1000gd ≡ ( ) º b-) 1200º ≡ ( ) rd

c-)10º ≡ ( ) rd d-)120π rd ≡ ( ) gd

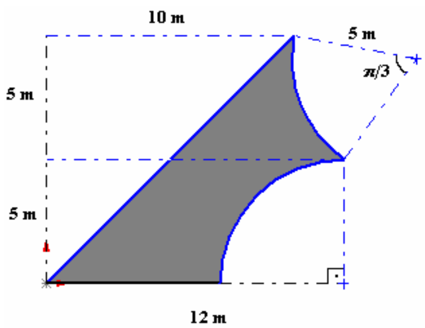
e-)200 rd ≡ ( ) gd f-)10º ≡ ( ) rd

g-)1000º ≡ ( ) gd

P3-) Invente um sistema de medidas, em que você vai dividir a circunferência em 70 partes iguais. Deduza uma fórmula para produzir a conversão de graus para o seu sistema de unidades e outra para converter de radianos em seu sistema de unidades.

P4-) Desenvolva um sistema de medida de ângulos em que uma circunferência é dividida em 140 partes iguais. Deduza uma fórmula para a conversão desse novo sistema para o sistema grau e para os sistema radiano.

P5-) Um engenheiro civil precisa fazer uma planilha de custos para uma obra e um dos itens a ser resolvido é quantos metros de cerca de arame farpado devem ser comprados para cercar o terreno. Sabe-se que o terreno tem a geometria da figura abaixo. O preço por metro de cerca é de R$ 3,00. Quanto será gasto nessa cerca? Dados: $\sqrt{2} = 1{,}4$, $\sqrt{3} = 1{,}7$, $\sqrt{5} = 2{,}2$ e $\pi = 3$.



P6-) Determine:

a-) sen (2000π) b-) cos $\left(\frac{17\pi}{4}\right)$

c-) tg $\left(\frac{25\pi}{4}\right)$ d-) sen $\left(\frac{25\pi}{6}\right)$

e-) cos $\left(\frac{37\pi}{6}\right)$ f-) tg $\left(\frac{55\pi}{3}\right)$

g-) sen $\left(\frac{25\pi}{2}\right)$

P7-) Dada uma circunferência de raio R, dê o valor do comprimento do arco compreendido entre os pontos abaixo, em que θ_0 é o ângulo inicial e θ_1 é o ângulo final.

Sugestão: Calcule o valor de $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_f$. O valor do comprimento do arco vai ser dado por: $c = R\Delta\theta$

a-) $R = 1,\quad \theta_0 = 0 \; e \; \theta_1 = \frac{\pi}{3}$ b-) $R = 5,\quad \theta_0 = \frac{\pi}{4} \; e \; \theta_1 = \frac{\pi}{3}$

c-) $R = 15,\quad \theta_0 = \frac{3\pi}{5} \; e \; \theta_1 = 2\pi$ d-) $R = 5,\quad \theta_0 = \frac{5\pi}{4} \; e \; \theta_1 = \frac{5\pi}{3}$

e-) $R = 2,\quad \theta_0 = 0 \; e \; \theta_1 = \frac{5\pi}{3}$ f-) $R = 3,\quad \theta_0 = \frac{\pi}{4} \; e \; \theta_1 = \frac{5\pi}{6}$

P8-) Qual o ângulo (em graus) formado pelos ponteiros do relógio quando ele marca os seguintes horários:

a-) 10:00 h. b-) 10:30 h. c-) 12: 40 h

d-) 1:25 h e-) 3: 37 h f-) 6: 50 h

g-) 7:25 h

P9-) Os arcos cujas medidas algébricas, em radianos, são os números da forma $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$, delimitam na circunferência trigonométrica pontos que são vértices de um polígono regular de n lados. O valor de n é:

a) 5 b) 6 c) 8

d) 9 e) 10

P10-) Represente, para cada item, em uma circunferência orientada, as extremidades dos arcos cujas expressões gerais são:

a) $x = k.90^{o} + 45^{o}, k \in \mathbb{Z}$ b) $x = k.\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

c) $x = k.\pi + (-1)^k.\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ d) $x = k.144^{o}, k \in \mathbb{Z}$

e) $x = k.45^{o} + 30^{o}, k \in \mathbb{Z}$ f) $x = k.\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

g) $x = k.\frac{\pi}{3} + (-1)^k.\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ g) $x = k.180^{o} \pm 30^{o}$

P11-) O arco de 108º, mede em radianos:
a) 0,5π b) 0,6π c) 0,4π
d) 0,7π e) 0,8π

P12-) Quantos radianos percorre o ponteiro dos minutos de um relógio em 50 minutos?
a) $\frac{16\pi}{9}$ b) $\frac{5\pi}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$
d) $\frac{4\pi}{2}$ e) $\frac{3\pi}{3}$

P13-) Após às 13h, a primeira vez que os ponteiros das horas e dos minutos formarão um ângulo de 36º será às?
a) 1h 10min b)1h 11min
c) 1h 12min d) 1h 13min
e) 1h 14min

P14-) Determinar a expressão geral dos arcos a sabendo que 2a + 40º e 50º - 3a são côngruos.

P15-) Determine todos os arcos entre $\frac{13\pi}{5}$ e $\frac{47\pi}{5}$ côngruos com $\frac{\pi}{5}$.

Gabarito

P1)(a) 120º; 3voltas (b)160º; 14voltas
(c) $\frac{4\pi}{3}$; 126voltas (d) $\frac{9\pi}{5}$; 2voltas (e)200º; 55voltas
(f) $\frac{6\pi}{5}$;295voltas (g)0º;2voltas

P2)(a)900º (b) $\frac{20\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{18}$ (d)24000gd (e) $\frac{40000}{\pi}$

P3) $M = \frac{7g}{36}$ e $M = \frac{35g}{\pi}$ P4) $g = \frac{18m}{7}$ e $g = \frac{\pi m}{70}$

P5) R$ 105,50 P6) (a)0 (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c)1 (d)0,5 (e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(f) $\sqrt{3}$ (g) 1

P7)(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{5\pi}{12}$ (c) 21π (d) $\frac{25\pi}{12}$ (e) $\frac{10\pi}{3}$
(f) $\frac{7\pi}{4}$

P8) (a)60º (b)45º (c)140º (d)107,5º (e)113,5º (f) 95º (g)72,5º

P9) c P11) b P12) b P13) c P14) $a = 2^{o} + 360^{o}.k$

P15) $\frac{21\pi}{5}, \frac{31\pi}{5}, \frac{41\pi}{5}$

IV. Funções

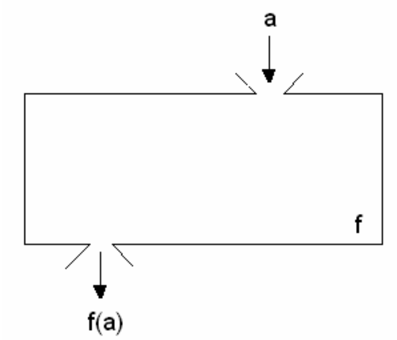
Nesse capítulo vamos começar a estudar um pouco sobre essas máquinas (funções) que transformam um número em outro tipo de número. Essas máquinas podem ser separadas de acordo com um grupo de características as quais veremos também nesse capítulo.

IV.1 – Funções

As funções podem ser vistas como máquinas. Em geral uma máquina manufatureira recebe a matéria prima e transforma num produto manufaturado. Veja que uma máquina de moer carne transforma carne em pedaços grandes, em carne moída, uma máquina de fazer algodão doce transforma açúcar cristal em algodão doce. Veja que nesses exemplos a matéria prima faz parte de um tipo de conjunto e o produto manufaturado faz parte de um outro conjunto. No exemplo da máquina de moer carne a matéria prima faz parte do conjunto que contêm todos os tipos de carne em pedaço, pois qualquer tipo de carne em pedaços pode entrar nessa máquina e essa vai moê-lo com facilidade já a carne moída, que é o produto, é o que sai da máquina, essa faz parte de um outro conjunto, o conjunto de todos os tipos de carne moída.

Vamos trazer esses exemplos do dia a dia para o nosso contexto. As funções numéricas são máquinas numéricas, ou seja, são máquinas que transforma números de um certo conjunto em números de outro conjunto.

Veja que aqui nesse exemplo foi colocado na máquina um número "a" (um que possa entrar na máquina) e a máquina devolveu um número "f(a)". Essa é a principal característica de uma função, ou seja, um certo elemento que entra na função produz apenas um novo elemento. É importante observar que existe um certo conjunto que contêm todos os elementos que podem entrar na máquina, esse conjunto é chamado conjunto **DOMÍNIO**. Há também o conjunto de todos os elementos que a máquina gera, esse é o conjunto **IMAGEM**.



Quando nos referimos a uma certa função escrevemos assim:
f:A→B. Essa notação quer dizer que a função f é uma que transforma elementos do conjunto A em elementos do conjunto B.

IV.2 – Tipos de funções

Existem alguns tipos particulares de funções e vamos estudá-los a fim de utilizarmos esse conteúdo posteriormente.

- **Função par** – É toda função que quando aplicamos um número "a" nessa função, ou seja, calculamos o f(a), obtemos um certo valor e quando calculamos o f(-a) obtemos o mesmo valor. Assim:

  f(a) = f(-a)

  Ex. $f(x) = x^2$. Para qualquer número "a": $f(a) = a^2$ e $f(-a) = (-a)^2 = a^2$

- **Função ímpar** – É toda função que quando calculamos o f(a) obtemos um certo valor e quando calculamos o f(-a) obtemos o valor de "–f(a)". Assim:

  f(-a) = - f(a)

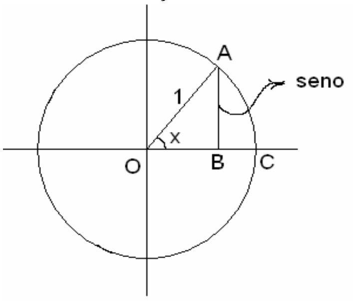
  Ex. $f(x) = x^3$. Para qualquer número "a": $f(a) = a^3$ e $f(-a) = (-a)^3 = -a^3$

V. Funções Trigonométricas

Já vimos no capítulo anterior um breve resumo sobre a definição de função e algumas de suas características. Nesse capítulo vamos definir outros tipos de funções as quais chamaremos de funções trigonométricas.

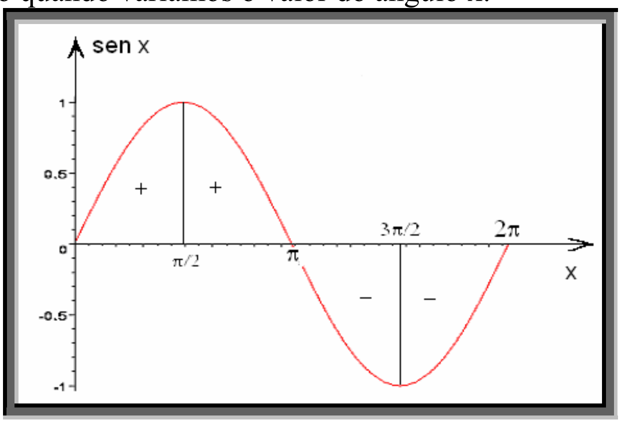
V.1 – Função seno

No segundo capítulo vimos a definição de seno, que para um ângulo agudo de um triângulo retângulo, a razão $\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$ é equivalente ao seno desse referido ângulo. Vamos nos valer dessa definição para definir a função seno.



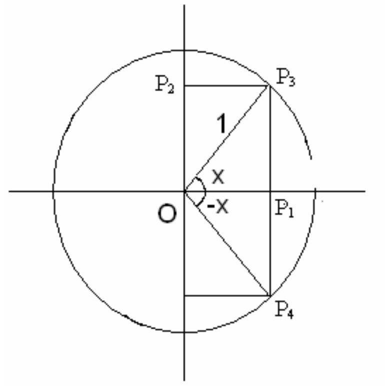
Veja na figura ao lado que para um dado ângulo x, dentro da circunferência trigonométrica, podemos obter um triângulo retângulo de hipotenusa igual a 1 (raio da circunferência trigonométrica) e catetos AB e OB. Vamos calcular o seno do ângulo x. $senx = \frac{AB}{1} = AB$. Veja que o valor do cateto AB é o próprio seno e que quando mudamos o valor de x o cateto AB, o seno, também muda. Assim podemos escrever um expressão para o cateto AB, o seno de x, que dependa do ângulo x. Definimos então a função: $f(x) = sen(x)$.

Vejamos algumas particularidades sobre essa função:
Conforme x vai aumentando AB também aumenta até que x chegue a valer 90º. Nesse caso AB será igual ao raio da circunferência e então será igual a 1. Quando x ultrapassa 90°, AB volta a diminuir até que x alcance o valor de 180º onde não haverá mais triângulo e então AB valerá zero. Aumentando ainda mais o valor de x, o triângulo passa a pertencer ao 3º quadrante e AB torna-se negativo chegando ao mínimo de valer -1 quando x alcança o ângulo de 270º. Quando x ultrapassa esse ângulo de 270º, AB volta a aumentar e vai até zero quando x alcança um ângulo de volta inteira. Veja que quando x ultrapassar esse ângulo de volta inteira (360º) todo o processo passa a se repetir. Com isso, podemos dizer que o seno é uma função limitada, pois ele varia de -1 até 1. Podemos também dizer que a função seno é periódica pois quando x varia de zero até 360º ela adquire uma gama de valores e quando ele ultrapassa 360º ela repete tudo que fez na primeira volta na circunferência. Vamos aqui utilizar ângulos em radianos. A figura abaixo mostra um gráfico que traz o comportamento da função seno quando variamos o valor do ângulo x.



V.1.1 – Particularidades da função seno

Vimos que por mais que variemos o valor de x entre os números reais, o seno de x está sempre compreendido entre -1 e 1. Assim, definimos formalmente f: R→ [-1, 1] tal que f(x) = sen x.



Da figura temos que, sen x = P_1P_3 ; Calculamos o valor de sen(-x) = - P_1P_3 ; Como $\Delta OP_1P_3 \equiv \Delta OP_1P_4$,→$P_1P_3 \equiv P_1P_4$. Assim, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, para todo x, logo, f(x) = sen x é uma função ímpar.

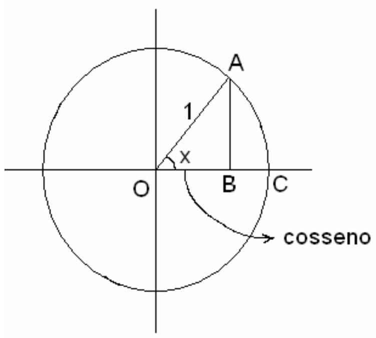
Assim, podemos resumir três particularidades dessa função, uma que a função seno é **periódica (de período 2π)**, outra que é função **impar** e a terceira é que a função seno é **limitada** (vale no máximo 1 e no mínimo -1).

Vejamos em que casos o seno assume valor zero, 1 ou -1:

Forma dos ângulos	Valores do seno
$x = k\pi,\ k \in Z$	$senx = 0$
$x = k(2\pi) + \dfrac{\pi}{2},\ k \in Z$	$senx = 1$
$x = k(2\pi) - \dfrac{\pi}{2},\ k \in Z$	$senx = -1$

V.2 – Função cosseno;

No segundo capítulo vimos a definição de cosseno, que para um ângulo agudo de um triângulo retângulo, a razão $\dfrac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$ é equivalente ao seno desse referido ângulo. Vamos nos valer dessa definição para definir a função cosseno.

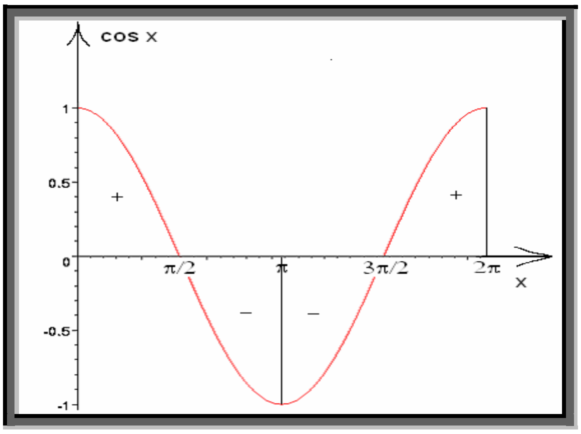


Veja na figura ao lado que para um dado ângulo x, dentro da circunferência trigonométrica, podemos obter um triângulo retângulo de hipotenusa igual a 1 (raio da circunferência trigonométrica) e catetos AB e OB. Vamos calcular o cosseno do ângulo x. $\cos x = \dfrac{OB}{1} = OB$. Veja que o valor do cateto OB é o próprio cosseno e que quando mudamos o valor de x o cateto OB, o cosseno, também muda. Assim podemos escrever um expressão para o cateto OB, o cosseno de x, que dependa do ângulo x. Definimos então a função: $f(x) = \cos(x)$.

Vejamos algumas particularidades sobre essa função:

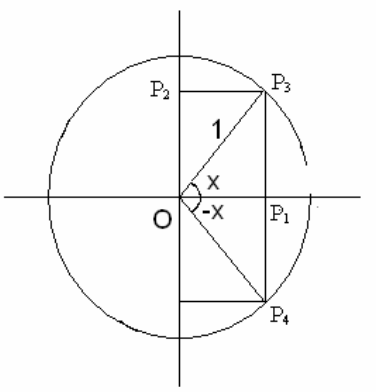
Quando x é igual a zero veja que não existe triângulo e OB é igual ao raio que vale 1 (por definição). Conforme x vai aumentando OB diminui até que x chegue a valer 90º. Nesse caso OB será igual a zero. Quando x ultrapassa 90°, OB continua a diminuir até que x alcance o valor de 180º onde não haverá mais triângulo e então OB valerá -1. Aumentando ainda mais o valor de x, o triângulo passa a pertencer ao 3º quadrante e OB que já era negativo vai aumentando até valer zero, quando x alcança o ângulo de 270º. Quando x ultrapassa esse ângulo de 270º, OB volta a aumentar e vai até 1 quando x alcança um ângulo de volta inteira. Veja que quando x ultrapassar esse ângulo de volta inteira (360º) todo o processo passa a se repetir. Com isso, podemos dizer que o cosseno é uma função limitada, pois ele varia de -1 até 1. Podemos também dizer que a função cosseno é periódica pois quando x varia de zero até 360º ela adquire uma gama de valores e quando ele ultrapassa 360º ela repete tudo que fez na primeira volta na circunferência. Vamos aqui utilizar ângulos em radianos. A figura abaixo mostra um gráfico que traz o comportamento da função cosseno quando variamos o valor do ângulo x.

Conforme vimos, a função cosseno atinge o seu máximo quando OB = OC = 1. Assim $-1 \leq \cos x \leq 1$, para todo x pertencente a R. Definimos f: R→ [-1, 1] tal que f(x) = cos x. Vejamos o seu gráfico.



V.2.1 – Particularidades da função cosseno

Vimos que por mais que variemos o valor de x entre os números reais, o cosseno de x está sempre compreendido entre -1 e 1. Assim, definimos formalmente f: R→ [-1, 1] tal que f(x) = cos x.



Da figura temos que, cos x = OP_1; Calculamos o valor de cos(-x) = OP_1, pois os triângulos OP_3P_1 e OP_4P_1 são congruentes pelo caso ângulo, ângulo, lado em comum. Assim, $\cos(-x) = \cos x$, para todo x, logo, f(x) = cos x é uma função par.

Assim, podemos resumir três particularidades dessa função, uma que a função cosseno é **periódica (de período 2π)**, outra que é função **par** e a terceira é que a função seno é **limitada** (vale no máximo 1 e no mínimo -1). Na tabela abaixo está sendo mostrado em que casos o cosseno assume valor zero, 1 ou -1:

Forma dos ângulos	Valores do cosseno
$x = k(2\pi) + \pi,\ k \in Z$	$\cos x = -1$
$x = k(2\pi),\ k \in Z$	$\cos x = 1$
$x = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in Z$	$\cos x = 0$

Praticando!!!!

Nível I

01) Determine todos os valores de m para que $senx = 2 - m$ e $\cos x = \sqrt{2 - m^2}$.

02) Determinar os valores de n para que a expressão $I = 2n - 1$ seja um valor de seno de um número real.

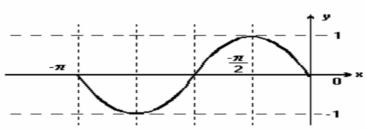
03) Determinar os valores de m para que a expressão $I = 1 - 3n^2$ seja um valor de cosseno de um número real.

04) Quantas e quais as soluções entre o intervalo $\left[0, 2\pi\right]$ a equação senx = 0 admite?

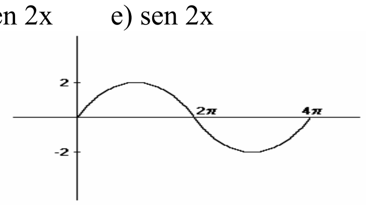
05) Quantas e quais as soluções entre o intervalo $\left[0, 2\pi\right]$ a equação $\cos x = 1$ admite?

06) Quantas e quais as soluções entre o intervalo $\left[0, 2\pi\right]$ a equação $\cos 3x = -1$ admite?

07)(UNITAU-95) Indique a função trigonométrica f(x) de domínio R; Im=[-1, 1] e período π que é representada, aproximadamente, pelo gráfico a seguir:
a) y = 1 + cos x. b) y = 1 - sen x.
c) y = sen (-2x).d) y = cos (-2x).
e) y = - cos x.



08)(FUVEST-96) A figura a seguir mostra parte do gráfico da função:
a) sen x b) 2 sen (x/2) c) 2 sen x
d) 2 sen 2x e) sen 2x



09) (FATEC-97) Considerando as funções trigonométricas definidas por f(x) = 2senx, g(x) = sen2x e h(x) = 2 + senx, tem-se

a) f(x) > h(x), para todo x ∈ IR.
b) g(x) ≤ h(x), para todo x ∈ IR.
c) f(x) e g(x) têm períodos iguais.
d) f(x) e h(x) têm períodos diferentes.
e) g(x) ≤ senx ≤ f(x), para todo x ∈ IR.

Nível II

01) (FUVEST) O ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos é :
a) 27º b) 30º c) 36º
d) 42º e) 72º

02) (PUC) Sendo θ um ângulo agudo, então (5π/2 - θ) pertence a qual quadrante :
a) 1° b) 2° c) 3°
d) 4º e) n.d.a.

03) (PUC) Todos os valores de x, de modo que a expressão $\text{sen}\,\theta = \frac{2x-1}{3}$ exista, são :
a) –1 ≤ x < 1 b) –1 < x ≤ 0
c) –1 ≤ x ≤ 2 d) –1 ≤ x ≤ ½
e) –1 ≤ x < 1/3

04) (CESCEM) Se x ∈] π; 3π/2[e cos x = 2k-1, então k varia no intervalo:
a)]-1,0[b) [-1,0[c)]0, ½[
d)]0,1[e)] ½ ,1[

05) (PUC) O valor numérico da expressão :
y = cos 4x + sen 2x + tg 2x – sec 8x para x = π/2 é:
a) 2 b) 1 c) 3
d) 0 e) 4

06) (CESCEM) O menor valor que assume a expressão (6 - senx), para x variando de 0º a 360º é:
a) 7 b) 6 c)5
d) 1 e) -1

07) (CESCEM) Os quadrantes onde estão os ângulos α, β e θ tais que :
sen α < 0 e cos α < 0
cos β < 0 e tg β < 0
sen θ > 0 e cotg θ > 0 são respectivamente :
a) 3º, 2º, 1º b) 2º, 1º, 3º
c) 3º, 1º, 2º d) 1º, 2º, 3º
e) 3º, 2º, 2º

08) (CESCEA) Seja A $\subset$ B, B = {x$\in$R| 0 $\leq$ x $\leq$ 2π} o domínio da função f, dada por: $f(x) = \frac{1 - \text{sen}^2 x}{1 + \text{sen}\, x}$.

Então, A é igual a :

a) {x$\in$B| x $\neq \pi/2$ e x $\neq$ 0 }

b) {x$\in$B| x $\neq \pi$ }

c) {x$\in$B| x $\neq 3\pi/2$ }

d) {x$\in$B| x = $3\pi/2$ }

09) (CESCEA) As raízes da equação

$x^2 - (2\text{ tg } a)x - 1 = 0$ são :

a) tg a ± cossec a   b) tg a ± cos a

c) tg a ± seca   d) não sei

10) (CESCEM) O seno de um dos ângulos agudos de um losango é igual a ½ portanto a tangente do maior ângulo interno é :

a) –1   b) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{-\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11) (MACK) Sendo 4sen x = 3 cos x , para qualquer valor real de x então tg x vale :

a) ¾   b) 4/3   c) 1

d) – ¾ e) – 4/3

12) (FUVEST) O menor valor de $\frac{1}{3 - \cos x}$, com x real, é :

a) 1/6   b) ¼   c) ½

d) 1   e) 3

13) (FUVEST) Dado o ângulo $\alpha = 1782^o$, então :

a) sen α = - sen 18^o; cos α = cos 18^o; tg α = - tg 18^o.

b) sen α = - sen 18^o; cos α = - cos 18^o; tg α = - tg 18^o.

c) sen α = sen 18^o; cos α = cos 18^o; tg α = tg 18^o.

d) sen α = sen 18^o; cos α = - cos 18^o; tg α = tg 18^o.

e) sen α = sen 18^o; cos α = cos 18^o; tg α = - tg 18^o.

14) (MACK) Assinale a alternativa correta :

a) sen 1 > sen 3   b) sen 3 < sen 5   c) sen 5 > sen 6   d) sen 6 > sen 7   e) sen 7 > sen $\pi/2$

15) (FATEC) Se x é um número real tal que

$\text{sen}^2 x - 3\text{sen } x = -2$, então x é igual a :

a) $\pi/2 + h\pi$, h $\in$ Z   b) $3\pi/2 + h\pi$, h $\in$ Z

c) $3\pi/2 + h2\pi$, h $\in$ Z   d) $\pi/2 + h2\pi$, h $\in$ Z

e) $\pi/4 + h\pi$, h $\in$ Z

16) (GV) O menor real positivo que satisfaz a equação $2\text{sen}^2 x - 3\cos x - 3 = 0$ é :

a) π b) $8\pi/3$ c) 3π

d) $14\pi/3$ e) nda

17) (FEI) Se 0 < x < $\pi/4$, é válido afirmar-se que:

a) sen ($\pi/2$ - x) = sen x

b) cos (π - x) = cos x

c) sen (π + x) = sen x

d) sen ($\pi/2$ - x) = cos x

e) cos (π + x) = sen x

18) (UNAERP) Sendo sen x = ½ ; x$\in$Q, o valor da expressão ($\cos^2$ x). ($\sec^2$ x) + 2senx é:

a) zero b) 1   c) 3/2

d) 2   e) 3

19) (CESGRANRIO)O número de raízes reais da equação

3/2 + cosx = 0 é:

a) 0   b) 1   c) 2

d) 3   e) maior do que 3

GABARITO

Nível I

01) $m = \frac{5}{4}$ 02) $0 \leq n \leq 1$

03) $n \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$ *ou* $n \leq -\frac{\sqrt{6}}{3}$

04) 3 soluções   05) 2 soluções

06) 3 soluções   07)C   08)B   09)B

Nível II

01) C 02) A 03) C 04) C 05) D 06) C 07) A
08) C 09) C 10) C 11) A 12) B 13) A 14) A
15) D 16) E 17) D 18) D 19) A 20) D

VI. Funções Complementares

VI.1 – Função Tangente;

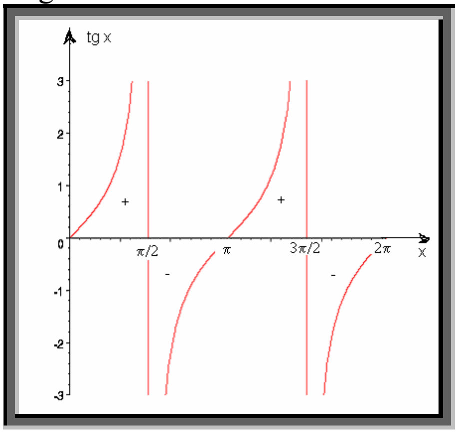
Definimos como tangente a função dada pela seguinte relação:

$$\boxed{tgx = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}}$$

Vamos analisar o seu domínio. Como temos um cosseno no denominador, temos que assegurar que esse cosseno nunca seja zero, caso contrário se teria uma operação proibida na matemática, que é a divisão por zero. Do capítulo anterior vimos que o cosseno é zero apenas nos ângulos da forma $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$. Assim, podemos dizer que a função tangente é definida em todos os reais exceto nos ângulos que zeram o cosseno. Logo, definimos formalmente:

$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in Z \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = tgx$.

A respeito da sua paridade, temos que a função tangente é ímpar, pois é a razão de uma função ímpar com uma função par. Como fazem parte do seu domínio ângulos da circunferência trigonométrica, a partir do ângulo 180º tudo se repete, isso caracteriza a função tangente com uma função periódica. Segue a baixo o gráfico da função tangente.



VI.2 – Função Secante;

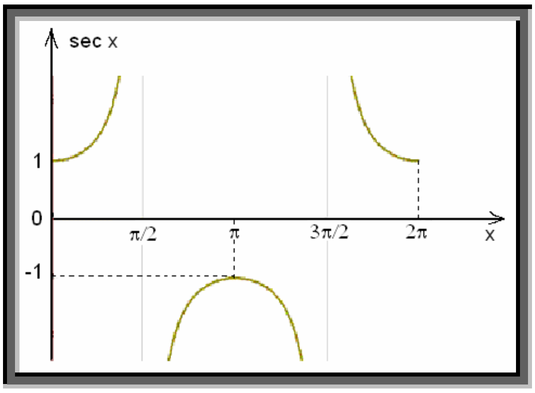
Definimos como secante como sendo a função dada pela seguinte relação:

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$$

Vamos analisar o seu domínio. Como temos um cosseno no denominador, temos que assegurar que esse cosseno nunca seja zero, caso contrário, teria uma operação proibida na matemática, que é a divisão por zero. Do capítulo anterior vimos que o cosseno é zero apenas nos ângulos da forma $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$. Assim, podemos dizer que a função secante é definida em todos os reais exceto nos ângulos que zeram o cosseno. Logo, definimos formalmente:

$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in Z \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = \sec x$.

A respeito da sua paridade, temos que a função secante é par, pois é proporcional ao inverso do cosseno, apenas, que é uma função par. Como fazem parte do seu domínio ângulos da circunferência trigonométrica, a partir do ângulo 360º tudo se repete, isso caracteriza a função secante com uma função periódica. Segue a baixo o gráfico da função secante.



VI.3 – Função Cossecante;

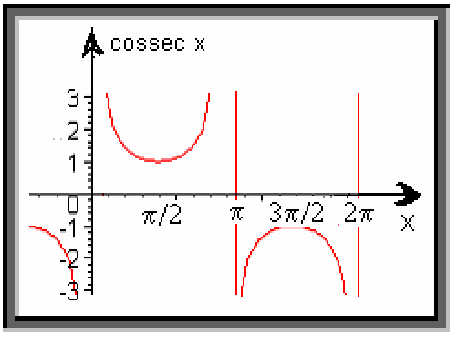
Definimos cossecante como sendo a função que é dada pela relação:

$$\boxed{\cos\sec x = \frac{1}{senx}}$$

Vamos analisar o seu domínio. Como temos um seno no denominador, temos que assegurar que esse seno nunca seja zero, caso contrário terá uma operação proibida na matemática, que é a divisão por zero. Do capítulo anterior vimos que o seno é zero apenas nos ângulos da forma $k\pi,\ k \in Z$. Assim, podemos dizer que a função cossecante é definida em todos os reais exceto nos ângulos que zeram o cosseno. Logo, definimos formalmente:

$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\ ,\ k \in Z\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos\sec x$.

A respeito da sua paridade, temos que a função secante é ímpar, pois só depende (de maneira inversamente proporcional) do seno, que é uma função ímpar. Como fazem parte do seu domínio ângulos da circunferência trigonométrica, a partir do ângulo 360º tudo se repete, isso caracteriza a função cossecante com uma função periódica. Segue a baixo o gráfico da função cossecante.



VI.4 – Função Cotangente;

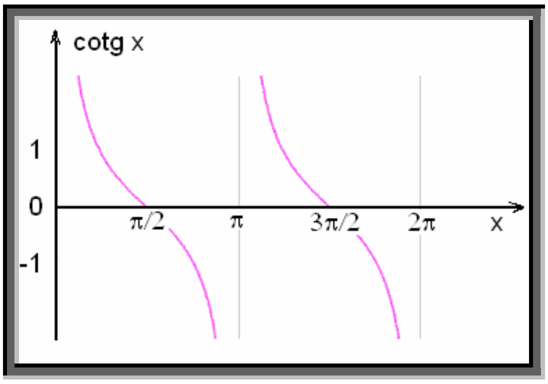
Definimos como cotangente como sendo a relação expressa por:

$$\boxed{\cot gx = \frac{\cos x}{senx}}$$

Vamos analisar o seu domínio. Como temos um seno no denominador, temos que assegurar que esse seno nunca seja zero, caso contrário teria uma operação proibida na matemática, que é a divisão por zero. Do capítulo anterior vimos que o seno é zero apenas nos ângulos da forma $k\pi,\ k \in Z$. Assim, podemos dizer que a função cotangente é definida em todos os reais exceto nos ângulos que zeram o seno. Logo, definimos formalmente:

$f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi\ ,\ k \in Z\} \to \mathbb{R}$, tal que, $f(x) = \cot gx$.

A respeito da sua paridade, temos que a função cotangente é ímpar, pois se trata de uma razão entre funções par e ímpar. Como fazem parte do seu domínio ângulos da circunferência trigonométrica, a partir do ângulo 180º tudo se repete, isso caracteriza a função cotangente com uma função periódica. Segue a baixo o gráfico da função cotangente.



VI.5 – Resumo dos períodos das funções complementares;

A tabela abaixo mostra como se comportam os períodos das funções complementares, tendo por base os seus gráficos. Admitirmos que essas funções sejam periódicas é um tanto quanto óbvio, pois como vimos elas dependem diretamente das funções seno e cosseno que apresentam períodos bem definidos.

Função	Período
tangente	π
secante	2π
cossecante	2π
cotangente	π

VI.6 – Relação Fundamental da Trigonometria;

Da figura acima, como o triângulo ΔOP_1P_3 é retângulo de lados sen(x), cos(x) e 1, podemos aplicar o teorema de Pitágoras. Daí temos a seguinte relação:

$$\boxed{\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1}$$

Esta relação é uma das mais importantes da trigonometria e é conhecida como Relação Fundamental.

VI.7 – Relações Decorrentes;

A partir da relação fundamental da trigonometria, podemos desenvolver duas outras relações muito importantes que serão muito úteis para a resolução de exercícios de maiores graus de dificuldade: Veja!!!!

Sabe-se que: $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$ (I) , $\forall\ x \in \Re$.

1. Seja $\cos x \neq 0$. Dividindo (I) por $\cos^2 x$ temos:

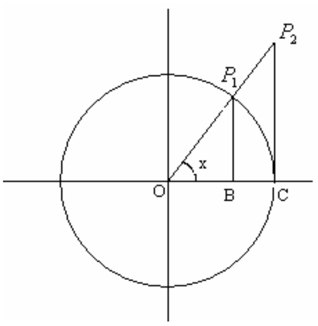
$$\boxed{tg^2 x + 1 = \sec^2 x}$$

2. Seja $\text{sen}\, x \neq 0$. Dividindo (I) por $\text{sen}^2 x$ temos:

$$\boxed{\cot g^2 x + 1 = \cos\sec^2 x}$$

VI.8 – Localização da tangente, da secante, da cossecante e da cotangente no circulo trigonométrica;

Onde estão a tangente, secante, cossecante e a cotangente no círculo trigonométrico?

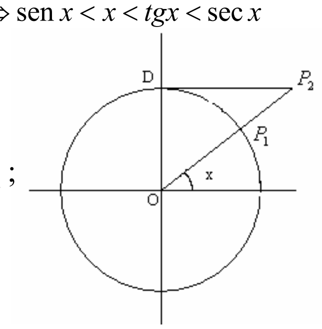


1. $tgx = P_2C$;
2. $\sec x = OP_2$;

Veja graficamente, que podemos estabelecer uma desigualdade importantíssima:

$$P_1B < P_1C < P_2C < P_2O \Rightarrow \text{sen}\, x < x < tgx < \sec x$$

3. $\cot gx = DP_2$;
4. $\cos\sec x = OP_2$;



Praticando!!!!

Nível I

1-) Simplifique as expressões abaixo:

a-) $\dfrac{sen^2 x}{senx \cos^2 x + sen^3 x}$ b-) $\dfrac{\cos x - \cos x sen^2 x}{\cos^3 x + sen^2 x \cos x}$

c-) $\dfrac{tg^2 x - sen^2 x}{sen^2 x \cos^2 x + sen^4 x}$

2-) (UFRJ – 2000) Sejam O = (0 , 0) , P = (5 , 2) e P' = (2 , 5) . Girando em torno de O, no sentido trigonométrico (anti-horário), o segmento OP de um certo ângulo q, o ponto P transforma-se no ponto P'. Determine cosq.

3-) (UFES – 2002). Os valores $x \in \Re$, para os quais a expressão $\dfrac{2-x}{3+x}$ é o seno de um ângulo, são

4-) (UFBA – 1999) As expressões $E_1 = \dfrac{1 - tg^4 x}{\cos^4 x - sen^4 x}$ e $E_2 = \dfrac{1}{\cos^4 x}$ são equivalentes. Justifique.

5-) (UFCE) Supondo tg a definida , calcule o valor da expressão: (1 - sen^2 a). (1 + tg^2 a) é igual a:

6-) Calcule o valor numérico de I tal que: $I = \dfrac{\cos 30^o - \cos 30^o sen^2 18^o}{\left(\cos^2 22^o \cos^3 60 + sen^2 22^o sen^3 30\right)\cos^2 18^o}$

7-) Calcule o valor numérico de I tal que: $I = \dfrac{4\left(\cos'' 360^o - \cos'' 360^o sen^2 79^o\right)}{\left(\cos^2 27^o \cos^2 60 + \cos^2 63^o sen^2 30\right)\cos^2 79^o}$

8-) Determine o período e calcule os valores máximos e mínimos das funções abaixo:

a-) $f(x)=2senx$ b-) $f(x)=2+5senx$

c-) $f(x)=4-3sen2x$ d-) $f(x)=5sen\frac{x}{2}$

e-) $f(x)=\pi sen3x$ f-) $f(x)=2\pi sen\frac{x}{3}$

9-) Determine os valores máximos e mínimos das funções abaixo:

a-) $f(x)=7sen\left(\sqrt[3]{x}\right)$ b-) $f(x)=2\pi sen(\log kx)$

c-) $f(x)=10sen\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$ d-) $f(x)=2\cos(x-3)$

e-) $f(x)=\frac{2\pi}{n}\cos\left(xe^{\pi x}-1\right)$ f-) $f(x)=\sqrt[7]{2\pi}senx$

g-) $f(x)=2sen(\log(tgx))$ h-) $f(x)=\frac{30!\cos x}{\cot gx}$

i-) $f(x)=10sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$ k-) $f(x)=10\cos(\pi)$

10-) Analise as funções e diga se essas são pares, ímpares ou nem pares e nem ímpares:

a-) $f(x)=2senx\cos x$ b-) $f(x)=\frac{2senx}{\cos xtgx}$

c-) $f(x)=\frac{\pi sen^3x\cos xtgx}{senx+\sqrt{1-\cos^2x}}$ d-) $f(x)=xsenx$

e-) $f(x)=4tgxsen^3x$ f) $f(x)=\frac{\pi\cos xtgx}{\sqrt{1-sen^2x}}$

g-) $f(x)=\frac{\pi\cos x\sec x}{sen^2x\sqrt{1+cotg^2x}}$ g) $f(x)=\frac{\sqrt{1-\cos^2x}}{2}$

11-) Simplifique as expressões expressando-as apenas em função de senos e cossenos.

a) $\frac{sen^2x}{\cos xtgx}$ b) $\frac{\left(sen^2x\right)\left(\cos^3x\right)}{\left(\sec^2x\right)\left(tg^2x\right)}$

c) $\frac{\cot g^2x}{\left(\cos\sec^5x\right)(\cos x)}$ d) $\frac{sen^2x}{(1-\cos^2x)^3tgx}$

e) $\frac{(cotg^2x+1)}{\left(\cos\sec^5x\right)(\cos x)(1-\cos^2x)}$

12-) Esboce os gráficos das funções abaixo:

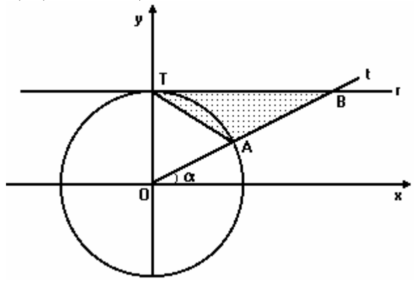
a) $f(x)=3senx$ b) $f(x)=1+2senx$

c) $f(x)=1-2senx$ d) $f(x)=2\cos 2x$

e) $f(x)=-2sen2x$ f) $f(x)=3sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

g) $f(x)=2+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ h) $f(x)=1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

13) (FUVEST) Na figura a seguir, a reta r passa pelo ponto T = (0,1) e é paralela ao eixo Ox. A semi-reta Ot forma um ângulo α com o semi-eixo Ox (0° < α < 90°) e intercepta a circunferência trigonométrica e a reta r nos pontos A e B, respectivamente.
A área do triângulo TAB, em função de α, é dada por:
a) (1 - senα)/2. cosα
b) (1 - senα)/2. senα
c) (1 - senα)/2. tgα
d) (1 - senα)/2. cotgα
e) (1 - senα)/2. secα



GABARITO

Nível I

1) (a) $senx$ (b) $\cos^2x$ (c) tg^2x

2) $\cos q=\frac{20}{29}$ 3) $x\geq-\frac{1}{2}$ 5) 1

6) $4\sqrt{3}$ 7) 16

8) (a) $P=2\pi$; Max = 2; mim = -2
 (b) $P=2\pi$; Max = 7; mim = -3
 (c) $P=\pi$; Max = 7; mim = 1
 (d) $P=4\pi$; Max = 5; mim = -5
 (e) $P=\frac{2\pi}{3}$; Max = π; mim = -π
 (d) $P=6\pi$; Max = 2π; mim = -2π

9) (a)ímpar (b)constante (c)ímpar (d)par

(e)par (f) ímpar (g)ímpar
(h)ímpar

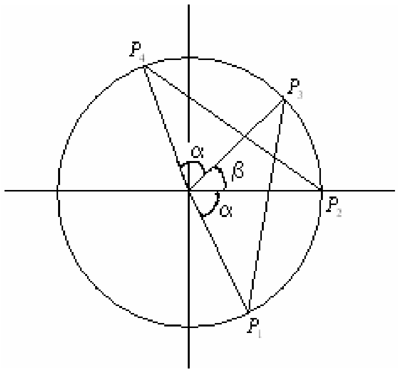
10) (a) Max = 7; mim = -7
(b) Max = 2π; mim = -2π
(c) Max = 10; mim = -10
(d) Max = 2; mim = -2
(e) Max = $\frac{2\pi}{n}$; mim = $-\frac{2\pi}{n}$
(f) Max = $\sqrt[7]{2\pi}$; mim = $\sqrt[7]{2\pi}$
(g) Max = 2; mim = -2
(h) Max = 30!; mim = -30!
(i) Max = 10; mim = -10
(j) Max = -10; mim = -10

11) (a) $senx$ (b) $\cos^7 x$ (c) $sen^3 x \cos x$
(d) $\frac{\cos x}{sen^5 x}$ (e) $\frac{senx}{\cos x}$

13) C

VII. Operações com Somas e Subtrações

Para o aprofundamento do estudo de trigonometria, faz-se necessário o desenvolvimento de novas relações que envolvam seno, cosseno e tangentes de soma e subtração de ângulos. A necessidade desses desenvolvimentos se dá, principalmente, quando estudamos equações que envolvem termos trigonométricos. A partir de agora estaremos colocando uma série de demonstrações e vamos utilizar alguns conceitos de geometria analítica. Acompanhe o raciocínio abaixo:



Vamos achar a expressão de cada ponto do desenho acima.

$P_1(\cos(-\beta), \operatorname{sen}(-\beta))$ $P_2(1,0)$

$P_3(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

$P_4(\cos(\alpha+\beta), \operatorname{sen}(\alpha+\beta))$

Como sabemos que, numa circunferência, ângulos iguais subentendem arcos iguais, temos:

$$\overline{P_2P_4} = \overline{P_1P_3}$$

Assim:

$(d_{P_1P_3})^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (-\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha)^2 =$

$= 2 + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta - 2\cos\alpha\cos\beta$

$(d_{P_2P_4})^2 = (1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + (0 - \operatorname{sen}(\alpha+\beta))^2 =$

$= 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$

$$(d_{P_2P_4})^2 = (d_{P_1P_3})^2 \Rightarrow$$

$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta - 2\cos\alpha\cos\beta$

assim chegamos que:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Para calcular $\cos(\alpha-\beta)$ basta substituir β por $(-\beta)$ e utilizar a paridade das funções seno e cosseno. Logo chegamos que:

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Sabendo que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) =$

$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$ aplicamos a formula acima,já demonstrada. Veja que:

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}^{sen\alpha}\cos\beta +$$

$$+ \underbrace{sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}_{\cos\beta} sen\beta = sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha .$$

Assim:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}$$

Para calcular $sen(\alpha-\beta)$ basta substituir β por $(-\beta)$ e utilizar a paridade das funções seno e cosseno. Logo chegamos que:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}$$

Vamos calcular $tg(a+b)$:

$tg(a+b)=\dfrac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=$

$\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\text{sen}\,\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$. Dividindo toda a fração pelo produto $\cos\alpha\cos\beta$, temos:

$$tg(a+b)=\frac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\text{sen}\,\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=$$

$=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$.

Assim,

$$\boxed{tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tgatgb}}$$

Para calcular $tg(\alpha-\beta)$ basta substituir β por $(-\beta)$ e utilizar a paridade das funções seno e cosseno. Logo chegamos que:

$$\boxed{tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tgatgb}}$$

Utilizando as fórmulas demostradas acima, vamos calcular alguns resultados muito importantes que nos pouparão tempo em resolução de determinadas questões:

a) $\text{sen}(2x)=sen(x+x)=\text{sen}\,x\cos x+senx\cos x=$

$$\boxed{\text{sen}(2x)=2senx\cos x}$$

b) $\cos(2x)=\cos(x+x)=cox.\cos x-senx.senx=$

$$\boxed{\cos(2x)=\cos^2 x-sen^2x}$$

Da relação fundamental temos que: $\cos^2 x=1-\text{sen}^2 x$. Substituindo na expressão acima temos uma segunda maneira de escrever o $\cos(2x)$.

$$\boxed{\cos(2x)=1-2sen^2x}$$

Podemos ainda substituir na expressão acima a relação fundamental $\text{sen}^2 x=1-\cos^2 x$. Com essa substituição chegamos em uma terceira maneira de escrever o $\cos(2x)$.

$$\boxed{\cos(2x)=2\cos^2 x-1}$$

c) $tg(2x)=tg(x+x)=\dfrac{tgx+tgx}{1-tgx.tgx}=$

$$\boxed{tg(2x)=\frac{2tgx}{1-tg^2x}}$$

Desenvolvendo as expressões do $\cos(2x)$, demonstradas acima, chegamos nas seguintes relações:

$$\boxed{\text{sen}^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2}}$$

$$\boxed{\cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

No capítulo que envolve a resolução de equações trigonométricas, veremos a necessidade de se ter expressões de seno, cosseno e tangente em função de uma única linha trigonométrica. Vamos então expressar $\text{sen}\,x,\cos x\ e\ tgx$ **em função de** $tg\left(\dfrac{x}{2}\right)$**:**

a) $\text{sen}\,x=2\,\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Vamos multiplicar e ao mesmo tempo dividir essa equação por $\sec^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

$$senx = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).\frac{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\underbrace{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}_{1+tg^2\frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\underbrace{1+tg^2\frac{x}{2}}_{\sec^2 x}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\boxed{senx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}$$

Utilizando o mesmo raciocínio chegamos que:

$$\boxed{\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}$$

Aplicando a fórmula da tangente de (2a), temos:

$$\boxed{tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}}$$

Praticando!!!!

Nível I

1-) Calcule:

a) $sen75^o$ b) $sen(22,5)^o$ c) $sen120^o$
d) $sen15^o$ e) $sen105^o$ f) $\cos 75^o$
g) $\cos 105^o$ h) $\cos(22,5^o)$ i) $\cos 15^o$
j) $tg75^o$ l) $tg15^o$ m) $tg(22,5^o)$

2-) Determine entre que valores a variável m pode variar para que as igualdades abaixo façam sentido.
a) $sen(2x+1) = 3m-5$ b) $sen(x-3) = m-1$

3-) Os valores de x que satisfazem, ao mesmo tempo, as equações $sena = x-1$ e $\cos a = \sqrt{2-x}$ são:
a)0 e -1 b)0 e 1 c)1 e 2
d)1 e -2 e)nda

4-) Dado que $sen^3 x = \frac{1}{27}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o valor de $\cos^3 x$ é:
a) $\frac{26}{27}$ b) $\frac{8}{27}$ c) $\frac{16}{27}$
d) $\frac{16\sqrt{2}}{27}$ e) $\frac{1}{3}$

5-) Verifique as identidades abaixo:

a) $\frac{sen^2 x.\cos x.tgx}{(1-\cos^2 x)} = senx$

b) $\frac{sen^2 x.\cos x.cotgx}{(1-sen^2 x)} = senx$

c) $\frac{\sec^2 x.\cos x.tgx}{(1+tg^2 x).cotgx} = \frac{sen^2 x}{\cos x}$

d) $\frac{sen^2(x-y).\cos(x^2).cotg(x^2)}{(1-\cos^2(x-y))sen(x^2)} = cotg^2(x^2)$

e) $cotg^2 a.\cos^2 a = cotg^2 a - \cos^2 a$

f) $tga(1-cotg^2 a) + cotga.(1-tg^2 a) = 0$

g) $tg^2 a - tg^2 b = \sec^2 a - \sec^2 b$

h) $\frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x} = \cos 2x$

i) $\frac{sena - 2sen^3 a}{2\cos^3 a - \cos a} = tga$

Nível II

01) (FEI-95) Se cosx = 0,8 e 0< x < π/2 então o valor de sen2x é:
a) 0,6 b) 0,8 c) 0,96
d) 0,36 e) 0,49

02) (FUVEST-95) Considere um arco AB de 110° numa circunferência de raio 10cm. Considere, a

seguir, um arco A'B' de 60° numa circunferência de raio 5cm.
Dividindo-se o comprimento do arco AB pelo do arco A'B', obtém-se:

a) 11/6 b) 2 c) 11/3
d) 22/3 e) 11

03) (MACK-96) Se sen x = 4/5 e tg x < 0, então tg 2x vale:

a) 24/7 b) -24/7 c) -8/3
d) 8/3 e) -4/3

04) (FEI-94) Se cotg(x) + tg(x) = 3, então sen(2x) é igual a:

a) 1/3 b) 3/2 c) 3
d) 2/3 e) n.d.a.

05) (FUVEST-94) O valor de (tg 10º + cotg 10º). sen 20º é:

a) ½ b) 1 c) 2
d) 5/2 e) 4

06) (CESGRANRIO-95) Se senx - cosx = 1/2, o valor de senx. cosx é igual a:

a) -3/16 b) -3/8 c) 3/8
d) ¾ e) 3/2

07) (FATEC-95) Se sen 2x = 1/2, então tg x + cotg x é igual a:

a) 8 b) 6 c) 4
d) 2 e) 1

08) (FUVEST-89) A tangente do ângulo 2x é dada em função da tangente de x pela seguinte fórmula: tg 2x = 2 tgx/(1 - tg^2x).
Calcule um valor aproximado da tangente do ângulo 22°30'.

a) 0,22 b) 0,41 c) 0,50
d) 0,72 e) 1,00

09) (MACK) O valor de $y = \frac{\sqrt{2}.\text{sen}(x+45^o)}{\cos x}$, x ≠ π/2 + kπ, k ∈Z, é :

a) sec x. sen x + 1
b) tg x
c) sen x + cos x
d) sec x – tg x
e) 1 + sec x

10) (UNICAMP-95) Encontre todas as soluções do sistema:

sen (x + y) = 0 e sen (x - y) = 0
que satisfaçam 0 ≤ x ≤ π e 0 ≤ y ≤ π.

11) (FUVEST-93 - Adaptada) O valor máximo de: f(x, y) = 3cos x + 2sen y é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b) 3** **c)** $5\frac{\sqrt{2}}{2}$ **d)** $\sqrt{13}$
e) 5

12) (FATEC-96) Se x - y = 60°, então o valor de $(\text{senx} + \text{seny})^2 + (\text{cosx} + \text{cosy})^2$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

13) (FGV-94) Reduza à expressão mais simples possível:
a) (cos 15° + sen 15°)^2;

14) Dado que sen x. cos x = m, calcule o valor de: y = sen^4 x + $\cos^4$ x e z = sen^6 x + $\cos^6$ x, em função de m.

15-) Calcule o valor numérico de *I* tal que:
$$I = \frac{4\left(\cos'' 360^o - \cos'' 360^o sen^2 79^o\right)}{\left(\cos^2 27^o \cos^2 60 + \cos^2 63^o sen^2 30\right)\cos^2 79^o}$$

16-) Elimine x do sistema.

a) $\begin{cases} tgx + \sec x = m \\ \sec x - tgx = n \end{cases}$ b) $\begin{cases} sen(2x) + \cos(2x) = m \\ \cos(2x) - sen(2x) = n \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1 - sen^2(2x) = m \\ senx + \cos x = n \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2\cos^2 x - 1 = m \\ senx - \cos x = n \end{cases}$

17-) Verifique as identidades abaixo:
a) $2sen^2 x - 1 = sen^4 x - \cos^4 x$
b) $(2 - \cos^2 x)(2 + tg^2 x) = (1 + 2tg^2 x)(2 - sen^2 x)$

GABARITO

Nível I

1)(a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (b) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (e) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (f) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(g) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (h) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (i) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(j) $2+\sqrt{3}$ (l) $2-\sqrt{3}$ (m) $\sqrt{2}-1$

2)(a) $\frac{4}{3} \le m \le 2$ (b) $0 \le m \le 2$

3) C 4)D

Nível II

01) C 02) C 03) A 04) D 05) C 06) C 07) C 08) B 09) A 10) S = { (0, 0), (0, π), (π, 0), (π,π), (π/2, π/2) } 11) E 12) D 13) a) 3/2; b) 1 14) $y = 1 - 2m^2$; $z = 1 - 3m^2$ 15)

VIII. Transformações

VIII.1 – Transformação de soma de senos em produto;

Nessa seção vamos ver como fazer transformações que simplificam muitos problemas no momento em que aparece soma de senos. Muitas vezes transformar essas somas em produtos simplifica as coisas.

$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = ?$ Vamos chamar $a = p + q$ e $b = p - q$. Resolvendo o sistema abaixo temos:

$$\begin{cases} a = p+q \\ b = p-q \end{cases} \Rightarrow p = \frac{a+b}{2} \quad e \quad q = \frac{a-b}{2}$$

$$\operatorname{sen}(p+q) + \operatorname{sen}(p-q) = (\operatorname{sen} p \cos q + \cancel{\operatorname{sen} q \cos p})$$

$$+(\operatorname{sen} p \cos q - \cancel{\operatorname{sen} q \cos p}) = 2 \operatorname{sen} p \cos q.$$ Como $p = \frac{a+b}{2}$ e $q = \frac{a-b}{2}$, ao substituir na expressão acima chegamos à:

$$\boxed{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2}).}$$

VIII.2 – Transformação de diferença de senos em produto;

No caso da diferença de senos temos:

$$\operatorname{sen}(p+q) - \operatorname{sen}(p-q) = (\cancel{\operatorname{sen} p \cos q} + \operatorname{sen} q \cos p)$$

$$-(\cancel{\operatorname{sen} p \cos q} - \operatorname{sen} q \cos p) = 2 \operatorname{sen} q \cos p$$

Como $p = \frac{a+b}{2}$ e $q = \frac{a-b}{2}$, ao substituir na expressão acima chegamos à:

$$\boxed{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2})}$$

VIII.3 – Transformação de soma de cossenos em produto;

$\cos a + \cos b = ?$ Vamos chamar $a = p + q$ e $b = p - q$. Resolvendo o sistema abaixo temos:

$$\begin{cases} a = p+q \\ b = p-q \end{cases} \Rightarrow p = \frac{a+b}{2} \quad e \quad q = \frac{a-b}{2}$$

$$\cos(p+q) + \cos(p-q) = (\cos p \cos q - \cancel{\operatorname{sen} q \operatorname{sen} p})$$

$$+(\cos p \cos q + \cancel{\operatorname{sen} q \operatorname{sen} p}) = 2 \cos p \cos q.$$ Como $p = \frac{a+b}{2}$ e $q = \frac{a-b}{2}$, ao substituir na expressão acima chegamos à:

$$\boxed{\cos a + \cos b = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})}$$

VIII.4 – Transformação de diferença de cossenos em produto;

Queremos: $\cos a - \cos b = ?$ Vamos chamar $a = p + q$ e $b = p - q$. Resolvendo o sistema abaixo temos:

$$\begin{cases} a = p+q \\ b = p-q \end{cases} \Rightarrow p = \frac{a+b}{2} \quad e \quad q = \frac{a-b}{2}$$

$$\cos(p+q) - \cos(p-q) = (\cancel{\cos p \cos q} - \operatorname{sen} q \operatorname{sen} p)$$

$$-(\cancel{\cos p \cos q} + \operatorname{sen} q \operatorname{sen} p) = -2 \operatorname{sen} q \operatorname{sen} p.$$

Como $p=\frac{a+b}{2}$ e $q=\frac{a-b}{2}$, ao substituir na expressão acima chegamos à:

$$\cos a-\cos b=-2\,\mathrm{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

<u>VIII.4 – Fazendo o processo inverso;</u>

Muitas vezes temos que fazer o processo inverso, ou seja, transformar produtos de linhas trigonométricas em somas ou diferenças. A técnica para esse processo é semelhante à usada acima. Vamos chamar $a=p+q$ e $b=p-q$. Resolvendo esse sistema, temos que: $p=\frac{a+b}{2}$ e $q=\frac{a-b}{2}$. $OBS: p>q$. Fazendo a substituição na formula da soma de senos, temos:

$$\mathrm{sen}\,p\cos q=\frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}(p+q)+\mathrm{sen}(p-q)\right)$$

Adotando o mesmo raciocínio, temos as expressões abaixo:

$$\mathrm{sen}\,q\cos p=\frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}(p+q)-\mathrm{sen}(p-q)\right)$$

$$\cos p\cos q=\frac{1}{2}\left(\cos(p+q)+\cos(p-q)\right)$$

$$\mathrm{sen}\,p\,\mathrm{sen}\,q=-\frac{1}{2}\left(\cos(p+q)-\cos(p-q)\right)$$

Praticando!!!!

Nível I

1-) Calcule $sen4x$ em função de $sen2x$ e $cos\ 2x$.

2-) Calcular $sen3x$ em função de $senx$ e $\cos x$.

3-) Calcule cos $4x$ em função de $sen2x$ e $cos\ 2x$.

4-) Calcule tg6x em função de tg3x.

5-) Calcule sen(6A) em função de sen(3A) e cos(3A).

6-) Transforme em produto as expressões:

a) $sen5x+sen3x$ b) $sen3x+sen7x$
c) $sen5x-sen3x$ d) $sen8x-sen2x$
e) $\cos 7x+\cos 11x$ f) $\cos x+\cos 3x$
g) $\cos 4x-\cos 2x$ g’) $\cos 9x-\cos 5x$
h) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos 2x$ i) $\cos 4x-\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
j) $\cos 4x+sen\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ k) $\cos 8x+sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$
l) $\cos 5x-sen\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$ m) $\cos 9x+sen5x$
n) $sen\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+sen\left(7x+\frac{\pi}{6}\right)$
o) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(7x+\frac{\pi}{6}\right)$
p) $sen\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)-sen\left(7x+\frac{\pi}{6}\right)$
q) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(7x+\frac{\pi}{6}\right)$

7-) Calcule $sen2x$ em função de $tg\left(\frac{x}{2}\right)$.

8-) Calcule $\cos 2x$ em função de $tg\left(\frac{x}{2}\right)$.

9-) Calcule $tg2x$ em função de $tg\left(\frac{x}{2}\right)$.

10-) Calcule $\sec 2x$ em função de $tg\left(\frac{x}{2}\right)$.

11-) Calcule $\cot gx$ em função de $tg\left(\frac{x}{2}\right)$.

12-) Calcule $sen4x$ em função de tgx.

13-) Calcule $\cos 4x$ em função de tgx.

14-) Simplifique as expressões abaixo:

a) $\dfrac{\cos 3x - \cos 5x}{sen3x + sen5x}$ b) $\dfrac{\cos 7x - \cos x}{sen2x + sen6x}$

c) $\dfrac{\cos 4x + \cos 6x}{sen9x - senx}$ d) $\dfrac{\cos 2x + \cos 6x}{sen7x - senx}$

e) $\dfrac{\cos 4x + \cos 6x}{sen(2x)}$ f) $\dfrac{\cos 4x - \cos 6x}{2\cos\left(\frac{5x}{2}\right)}$

g) $\dfrac{\cos 9x - \cos 7x}{sen(4x).sen\left(\frac{x}{2}\right)}$ h) $\dfrac{4sen(2x)\cos\left(\frac{5x}{2}\right)}{sen9x - senx}$

15-) Faça o processo inverso, ou seja, transforme os produtos em soma ou diferenças.

a) $2sen(4x)\cos(3x)$ b) $\cos(4x)\cos(3x)$

c) $sen(5x)sen(2x)$ d) $sen(x)sen(2x)$

e) $sen(x)\cos(5x)$ f) $\cos(5x)sen(3x)$

g) $sen\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)sen\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

h) $sen\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$

i) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$

j) $sen\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)sen\left(6x + \frac{\pi}{3}\right)$

16-) Calcule $sen3x$ em função de $senx$ apenas.

17-) Calcule $tg3x$ em função de tgx apenas.

18-) Calcule $tg4x$ em função de tgx apenas.

Nível II

1) (FEI-94) Transformando a expressão:
(sen a + sen b)/(cos a + cos b), onde existir, temos:
a) sen (a + b) b) 1/cos(a + b)
c) cotg[(a + b)/2] d) tg[(a + b)/2] e) 1/sen(a + b)

2) Se a – b = π/2, determinar o valor de $y = \dfrac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos a + \cos b}$:
a) 2 b) 1 c) 0 d) - 1
e) - 2

3) (FEI) A expressão y = sen x + cos x pode ser escrita na forma y = k. cos(x - π/4). Determine o coeficiente k.
a) $-\sqrt{2}$ b) -1 c) 0 d) 1
e) $\sqrt{2}$

4) (FUVEST-96) Os números reais sen (π/12), sen a, sen (5π/12) formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então o valor de sen a é:
a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{4}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) (FGV-94) Reduza à expressão mais simples possível:
a) (cos 15° + sen 15°)^2; b) $\dfrac{\cos^4 10^o - \operatorname{sen}^4 10^o}{\cos 20^o}$

6) Calcule o valor numérico das expressões:
a) A = sen $\frac{11\pi}{12}$ .sen $\frac{13\pi}{12}$ b) B = $\cos\frac{7\pi}{8}$ .cos $\frac{\pi}{8}$

7) Prove que: 16 sen 10°. sen 30°. sen 50°. sen 70° = 1.

GABARITO

Nível I

1) $2sen(2x)\cos(2x)$ 2) $3senx\cos^2 x - sen^3 x$

3) $\cos^2(2x) - sen^2(2x)$ 4) $\dfrac{2tg3x}{1 - tg^2 3x}$

5) $2sen(3A)\cos(3A)$

6)(a) $2sen(4x)\cos(x)$ (b) $2sen(5x)\cos(2x)$

(c) $2sen(x)\cos(4x)$ (d) $2sen(3x)\cos(5x)$

(e) $2\cos(2x)\cos(9x)$ (f) $2\cos(2x)\cos(x)$

(g) $-2sen(3x)sen(x)$ (g’) $-2sen(7x)sen(2x)$

(h) $-2sen\left(\frac{\pi + 8x}{8}\right)sen\left(\frac{\pi - 8x}{8}\right)$

(i) $-2sen\left(\frac{16x+5\pi}{8}\right)sen\left(\frac{16x-5\pi}{8}\right)$

(j) $2\cos(3x)\cos(x)$ (l) $-2sen(4x)sen(x)$

m) $-2sen\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)sen\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

n) $2sen(9x)\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

o) $2\cos(5x)\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

p) $-2\cos(5x)sen\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

q) $2sen(5x)sen\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

7) $\frac{4tg\left(\frac{x}{2}\right)\left(1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$ 8) $\frac{1-6tg^2\left(\frac{x}{2}\right)+tg^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$

9) $\frac{4tg\left(\frac{x}{2}\right)\left(1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2-4tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ 10) $\frac{\left(1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{1-6tg^2\left(\frac{x}{2}\right)+tg^4\left(\frac{x}{2}\right)}$

12) $\frac{4tgx\left(1-tg^2x\right)}{\left(1-tg^2x\right)^2}$ 13) $\frac{1-6tg^2x+tg^4x}{\left(1+tg^2x\right)^2}$

Nível II

1) D 2) B 3) E 4) D 5) a) 3/2; b) 1 6) a) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$; b) $\frac{-2-\sqrt{2}}{4}$;

IX. Equações Trigonométricas

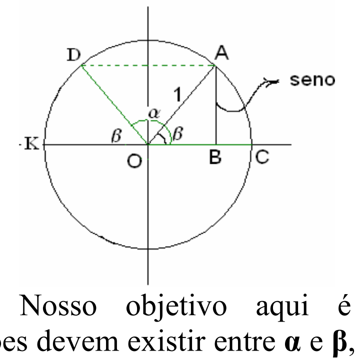
Finalmente chegamos ao assunto principal desse ano. Repare que você aprendeu muitos tópicos de Trigonometria, na verdade, você adquiriu muitas ferramentas, que até agora só puderam serem usadas em tópicos específicos para tais assuntos. Essa parte da Trigonometria é de suma importância, pois muitos fenômenos da natureza, situações do dia a dia, se comportam de maneira cíclica, ou periódica e podem ser definidas ou externadas sob funções trigonométricas. Para isso é necessário que saibamos resolver alguns tipos de equações que envolvem linhas trigonométricas, seno, cosseno e tangente.

O fato é que qualquer equação trigonométrica que possa ser resolvida, no final, se resumirá a uma equação do seguinte tipo:

1. $sen\alpha = sen\beta$
2. $\cos\alpha = \cos\beta$
3. $tg\alpha = tg\beta$

Vejamos com detalhes como resolver essas equações.

IX.1 – Equação do tipo senα = senβ;



Nosso objetivo aqui é descobrir que relações devem existir entre **α** e **β**, para que os seus senos sejam iguais. Para isso ser possível, temos que conhecer **β** e tentar expressar **α** como função de **β**.

Chamamos de β o ângulo AÔB e de α o ângulo BÔD. Veja que α e β têm o mesmo seno e o ângulo DÔK também vale β. Como o ângulo CÔK é um ângulo raso, mede 180°, então temos que

CÔD + DÔK = CÔK = 180º, ou seja, $\alpha + \beta = \pi$. Assim, vemos que todo par de ângulos, cuja soma é π, têm senos iguais. Logo, chegamos às seguintes soluções:

$$sen\alpha = sen\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ ou \\ \alpha = \pi - \beta \end{cases}$$

Claro que essas são soluções da minha equação, mas... e o ângulo $\beta + 2\pi$. Será que esse também é solução? Ele também é solução, pois é côngruo com o ângulo β. Na verdade todo ângulo que é côngruo com β também é solução, pois as funções trigonométricas não estão preocupadas com ângulos e sim com as posições desses ângulos na circunferência trigonométrica. Assim, são soluções da equação, os ângulos ***β + (múltiplos de 2π)***, ou seja, os ângulos da forma $\beta + 2k\pi$. Resumindo, temos:

$$sen\alpha = sen\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

Veja o exemplo: Resolver a equação $senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Não sabemos comparar senos com números, mas sabemos comparer senos com outros senos, assim podemos reescrever a equação como sendo: $senx = sen\left(\frac{\pi}{3}\right)$, logo:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

1-) Resolver as equações trigonométricas. Todas essas são do tipo $sen\alpha = sen\beta$:

Resumo: $sen\alpha = sen\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$

a) $senx = -1$ b) $senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $senx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ n) $sen5x = sen3x$

d) $sen^2 x - senx = 0$ j) $sen2x = \frac{1}{2}$

e) $2sen^2 x - 3senx + 1 = 0$

f) $2\cos^2 x = 1 - senx$ g)

$4sen^4 x - 11sen^2 x + 6 = 0$

h) $2senx - \cos\sec x = 1$ i) $3tgx = 2\cos x$

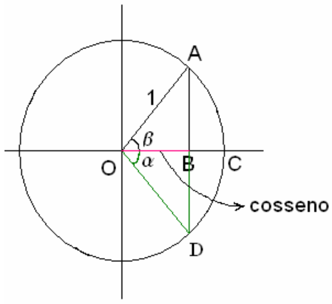
k) $sen3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ l) $sen2x = senx$ m) $sen\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

o) $2senx|senx| + 3senx = 2$

p) $\begin{cases} sen(x+y) = 0 \\ x - y = \pi \end{cases}$

IX.2 – Equação do tipo cosα = cosβ;

Nosso objetivo aqui é descobrir que relações devem existir entre **α** e **β**, para que os seus cossenos sejam iguais. Para isso ser possível, temos que conhecer **β** e tentar expressar **α** como função de **β**.



Chamamos de β o ângulo AÔB e de α o ângulo BÔD. Veja que α e β têm o mesmo cosseno. Veja que os triângulos ΔAOB e o ΔBOD são congruentes, pois AO é igual a OD que é igual a 1, OB é comum para ambos e ambos são triângulos retângulos (caso LLA), assim possuem ambos a mesma abertura AÔB e BÔD que é igual a β. Como α está no sentido negativo, dizemos que $\alpha = -\beta$. Como vimos no caso dos senos, na verdade existem infinitas soluções para essa equação, pois qualquer ângulo côngruo com β ou com $-\beta$, satisfaz essa equação. Logo temos as seguintes soluções para essa equação:

$$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}, \ com\ k \in \mathbb{Z}$$

Veja o exemplo: Resolver a equação $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Não sabemos comparar cossenos com números, mas sabemos comparar cossenos com outros cossenos, assim podemos reescrever a equação como sendo: $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, logo:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

2-) Resolver as equações trigonométricas. Todas essas são do tipo *cosα =cosβ*:

Resumo: $\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$

a) $\cos x = -1$ b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos^2 x + \cos x = 0$ e) $sen^2 x = 1 + \cos x$

f) $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$

g) $4\cos x + 3\sec x = 8$

h) $2sen^2 x + 6\cos x = 5 + \cos 2x$

i) $2\cos^2 x = \cos x$ j) $\cos 3x - \cos x = 0$

k) $\left(4 - \dfrac{3}{sen^2 x}\right)\left(4 - \dfrac{3}{\cos^2 x}\right) = 0$

l) $\cos 5x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ m) $sen^2 x + sen^4 x + sen^6 x = 3$

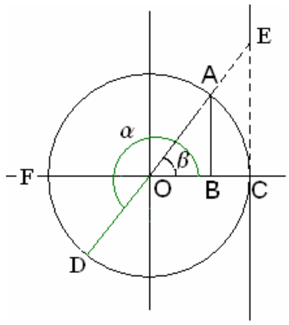
n) $sen\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - sen\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

o) $\begin{cases} x + y = \pi \\ senx + seny = \log t^2 \end{cases}$ ache os valores de t para que o sistema tenha solução.

IX.3 – Equação do tipo tgα = tgβ;

Nosso objetivo aqui é descobrir que relações devem existir entre **α** e **β**, para que os suas tangentes sejam iguais. Para isso ser possível, temos que conhecer **β** (é dado) e tentar expressar **α** como função de **β**.

Chamamos de β o ângulo AÔB e de α o ângulo BÔD. Veja que α e β são os únicos ângulos, dentro de uma volta na circunferência, que possuem esse valor (EC) de tangente. Da figura, temos que os ângulos AÔB e FÔD são opostos pelo vértice, logo são iguais. Assim, dizemos que α = β + 180º satisfaz essa equação. Logo vemos que uma solução para a equação é α = β é outra solução é α = β + 180º. Certamente que existem infinitas soluções, que serão todos os ângulos côngruos de β e β + 180º.



Veja:
Se o ângulo está na posição do ponto A ele é solução. Se está na posição do ponto D esse também é solução. Caso o ângulo esteja no ponto A, se a ele for somado π, chega-se no ponto D, se for somado mais π, volta-se para o ponto A. Isso resulta em um ciclo e para chegar a qualquer solução, basta acrescentar qualquer múltiplo de π ao ângulo β. Logo qualquer solução dessa equação pode ser escrita como:

$$\alpha = \beta + k\pi,\ com\ \ k \in \mathbb{Z}$$

3-) Resolver as equações trigonométricas. Todas essas são do tipo *tgα = tgβ*:

Resumo: $tg\alpha = tg\beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases}$

a) $tgx = 1$ b) $tg3x = 0$ c) $tgx = -\sqrt{3}$ d) $tg5x = tg3x$

e) $\sec^2 x = 1 + tgx$ f) $tgx + \cot gx = 2$ g) $sen^2 x = \cos^2 x$

h) $senx - \sqrt{3}\cos x = 0$

i) $\cos\sec^2 x = 1 - \cot gx$

j) $sen2x.\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos 2x.sen\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Resumo teórico

$sen(a \pm b) = sena\cos b \pm senb\cos a$ (I)

$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp senbsena$ (II)

$senx \pm seny = 2sen\left(\dfrac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x \mp y}{2}\right)$ (III)

$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ (IV)

$\cos x - \cos y = -2sen\left(\dfrac{x+y}{2}\right)sen\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ (V)

$senx = \dfrac{2tg\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$ (VI)

$$\cos x=\frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} \qquad \text{(VII)}$$

$$sen^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \text{(VIII)}$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \text{(IX)}$$

$$sen^4 x+\cos^4 x\equiv 1-\frac{sen^2 2x}{2} \qquad \text{(X)}$$

$$sen^6 x+\cos^6 x\equiv 1-\frac{3sen^2 2x}{4} \qquad \text{(XI)}$$

4-) Resolver as equações trigonométricas. Aqui você vai ter que desenvolver a sua própria técnica, até cair em uma daquelas do tipo que vimos.

i) Algumas equações clássicas: $a.senx+b.\cos x=c$ *a, b, c* ε *R.*

Resolvo o sistema: $\begin{cases} a.senx+b.\cos x=c \\ sen^2x+\cos^2 x=1\end{cases}$, acho o valor do *senx* e do cos*x*. Pronto agora tenho duas equações que sei resolver: $senx=m$ e $\cos x=n$.

ii) Outra técnica importante é: substituir senx por (VI) e cosx por (VII) e teremos uma equação do 2ª grau em $tg\left(\frac{x}{2}\right)$.

a) $sen4x+\cos 4x=1$ b) $\sqrt{3}.senx-\cos x=-\sqrt{3}$

c) $|senx|+|\cos x|=1$ d) $senx+\cos x=-1$

iii) equações do tipo $\sum senf_i(x)=0$ ou $\sum \cos f_i(x)=0$, passamos a soma para produto e analisamos o anulamento de cada fator do produto.

a) $sen7x+sen5x=0$ b) $senax+senbx=0$ *a, b* ε *R\{0}*

c) $\cos 6x+\cos 2x=0$ d) $\cos ax+\cos bx=0$ *a, b* ε *R\{0}*

e) $sex2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ f) $sen5x+senx=2sen3x$

g) $\cos x+\cos(2x+a)+\cos(3x+2a)=0$

h) $senx+sen3x+sen4x+sen6x=0$

i) $\cos^2(x+a)+\cos^2(x-a)=1$ j) $sen3x+\cos 2x-senx=1$

k) $senx+\cos x+senx\cos x+1=0$

l) $\begin{cases} sen(x+y)+sen(x-y)=2 \\ senx+\cos y=2\end{cases}$

iv) Equações do tipo $sen^4x+\cos^4 x=a$, aplicamos a relação (X) e antes de resolver verificamos se *a* obedece a relação: $\frac{1}{2}\le a\le 1$.

v) Equações do tipo $sen^6x+\cos^6 x=a$, aplicamos a relação (XI) e antes de resolver verificamos se *a* obedece a relação: $\frac{1}{4}\le a\le 1$.

a) $sen^6x+\cos^6 x=\frac{5}{8}$ b) $sen^6\frac{x}{2}+\cos^6\frac{x}{2}=\frac{7}{16}$

c) $sen^4x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$ d) $sen^4x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$

e) $sen^3x+\cos^3 x=1$

Quaisquer Equações:

a) $\frac{senx+sen5x-\cos 4x}{30+sen25x}=0$, $0\le x\le 2\pi$

b)Discuta, segundo m, as equações:

b.1) $m\cos x-(m+1).senx=m$

b.2) $senx+\cos x=m$

c) $tga+tg(2a)=2tg(3a)$, a ε [0,π/2).

GABARITO

1-) Resolver as equações trigonométricas. Todas essas são do tipo:
sen $\boldsymbol{\alpha=}$ ***sen*** $\boldsymbol{\beta}$**:**

a) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\}$

b) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ou \quad x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right\}$

c) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad ou \quad x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\}$

n) $S=\left\{x\in\Re \mid x=k\pi \quad ou \quad x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right\}$

d) $S=\left\{x\in\Re \mid x=k\pi \quad ou \quad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$

j) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{12}+k\pi \quad ou \quad x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi\right\}$

e) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \; ou \; x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \; ou \; x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$

f)

$S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \; ou \; x=\frac{-\pi}{6}+2k\pi \; ou \; x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right\}$

g) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pm\pi}{3}+2k\pi\right\}$

h)

$S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \; ou \; x=\frac{-\pi}{6}+2k\pi \; ou \; x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right\}$

i) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \; ou \; x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$

k) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3} \quad ou \quad x=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right\}$

l) $S=\left\{x\in\Re \mid x=2k\pi \quad ou \quad x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right\}$

m) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \ ou \ x=\pi+2k\pi\right\}$

o) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \ ou \ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$

p) $S=\left\{x, y\in\Re \mid x=\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2} \quad ou \quad y=\frac{-\pi}{2}+\frac{k\pi}{2}\right\}$

2-) Resolver as equações trigonométricas. Todas essas são do tipo:
***cos*α *=cos*β:**

a) $S=\{x\in\Re \mid x=\pi+2k\pi\}$ b) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pm\pi}{6}+2k\pi\right\}$

c) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pm\pi}{4}+2k\pi\right\}$

d) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\pi+2k\pi \quad ou \quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

e) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\pi+2k\pi \quad ou \quad x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

f) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pm 2\pi}{3}+2k\pi \ ou \ x=\pi+2k\pi\right\}$

g) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pm\pi}{3}+2k\pi\right\}$

h) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pm\pi}{3}+2k\pi \ ou \ x=2k\pi\right\}$

i) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pm\pi}{3}+2k\pi \ ou \ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$

j) $S=\left\{x\in\Re \mid x=k\pi \quad ou \quad x=\frac{k\pi}{2}\right\}$

k) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pm 2\pi}{3}+2k\pi \ ou \ x=x=\frac{\pm\pi}{3}+2k\pi\right\}$

l) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2} \ ou \ x=x=\frac{-\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}\right\}$

m) $S=\left\{x\in\Re \mid \frac{(2k+1)\pi}{2}\right\}$

n) $S=\{x\in\Re \mid 2k\pi\}$

o) $0{,}1<t\le 10$

3-) Resolver as equações trigonométricas. Todas essas são do tipo *tg*α *=* *tg*β:

a) $S=\left\{x\in\Re \mid x=k\pi+\frac{\pi}{4}\right\}$ b) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{2k\pi}{3}\right\}$

c) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{2\pi}{3}+k\pi\right\}$

d) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{k\pi}{2}, k \ par\right\}$

e) $S=\left\{x\in\Re \mid x=k\pi+\frac{\pi}{4} \ ou \ x=k\pi\right\}$

f) $S=\left\{x\in\Re \mid x=k\pi+\frac{\pi}{4}\right\}$

g) $S=\left\{x\in\Re \mid x=k\pi+\frac{\pi}{4} \quad ou \quad x=k\pi+\frac{3\pi}{4}\right\}$

h) $S=\left\{x\in\Re \mid x=k\pi+\frac{\pi}{3}\right\}$

i) $S=\left\{x\in\Re \mid x=k\pi+\frac{\pi}{2} \quad ou \quad x=k\pi+\frac{3\pi}{4}\right\}$

j) $S=\left\{x\in\Re \mid x=k\pi+\frac{\pi}{4}\right\}$

4-) (i) e (ii)

a) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{k\pi}{2} \quad ou \quad x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right\}$

b) $S=\left\{x\in\Re \mid x=2k\pi+\frac{11\pi}{6} \quad ou \quad x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right\}$

c) $S=\left\{x\in\Re \mid x=k\pi+\frac{\pi}{2} \quad ou \quad x=k\pi\right\}$

d) $S=\left\{x\in\Re \mid x=2k\pi+\frac{3\pi}{2} \quad ou \quad x=2k\pi+\pi\right\}$

(iii)

a) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{k\pi}{6} \quad ou \quad x=k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$

b) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{2k\pi}{a+b} \quad ou \quad x=\frac{2k\pi}{a-b}+\frac{\pi}{a-b}\right\}$

c) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \quad ou \quad x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right\}$

d) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{a+b}+\frac{2k\pi}{a+b} \quad ou \quad x=\frac{2k\pi}{a-b}-\frac{\pi}{a-b}\right\}$

e) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \quad ou \quad x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\}$

f) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{k\pi}{3} \quad ou \quad x=k\pi\right\}$

g) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pm\pi}{4}-\frac{a}{2}+k\pi \ ou \ x=\frac{2\pi}{3}-a+2k\pi \text{ ou } x=\frac{4\pi}{3}-a+2k\pi\right\}$

h) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{2}+k\pi \ ou \ x=\frac{2k\pi}{7}+2k\pi \ ou \ x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right\}$

i) $S=\left\{x\in\Re \mid x=k\pi+\frac{\pi}{4} \quad ou \quad x=k\pi+\frac{3\pi}{4}\right\}$

j) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \ ou \ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \ ou \ x=k\pi \ ou \quad x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\}$

k) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \quad ou \quad x=\pi+2k\pi\right\}$

l) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad ou \quad x=2k\pi\right\}$

(iv) e (v)

a) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{8}+k\pi \ ou \ x=\frac{3\pi}{8}+k\pi \ ou \ x=\frac{5\pi}{8}+k\pi \ ou \quad x=\frac{7\pi}{8}+k\pi\right\}$

b) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{3}+k\pi \ ou \ x=\frac{2\pi}{3}+k\pi\right\}$

c) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{4}+k\pi \ ou \ x=\frac{3\pi}{4}+k\pi\right\}$

d) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{6}+k\pi \ ou \ x=\frac{5\pi}{6}+k\pi \ ou \ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \ ou \quad x=\frac{2\pi}{3}+k\pi\right\}$

e) $S=\left\{x\in\Re \mid x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ ou \ x=2k\pi\right\}$

Quaisquer Equações:

a) $\left\{x\in\Re \mid 0,\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{5},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{5},\frac{7\pi}{4},\frac{9\pi}{5},2\pi\right\}$

b)Discuta, segundo m, as equações:

b.1) $\forall m\in\Re$

b.2) $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$

c) $\left\{x\in\Re \mid 0,\frac{\pi}{3}\right\}$