GEOMETRIA ESPACIAL - UNICAMP

Tópicos Básicos

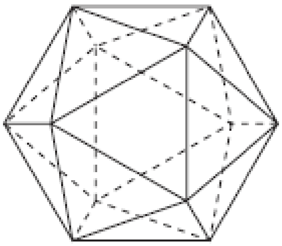
01. (UEL) As afirmações seguintes podem ser verdadeiras ou falsas.
I . A projeção ortogonal de uma reta num plano é uma reta.
II. Distância entre duas retas reversas é a perpendicular comum a essas retas.
III. A distância entre dois planos só é definida se esses planos são paralelos.
É correto afirmar que somente
a) II é verdadeira.
b) III é verdadeira.
c) I e II são verdadeiras.
d) I e III são verdadeiras.
e) II e III são verdadeiras.

02. (Puccamp) Considere as afirmações a seguir.
I. Duas retas distintas determinam um plano.
II. Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
III. Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a alguma reta do outro.
É correto afirmar que
a) apenas II é verdadeira.
b) apenas III é verdadeira.
c) apenas I e II são verdadeiras.
d) apenas I e III são verdadeiras.
e) I, II e III são verdadeiras.

03. (Unifei) Um poliedro convexo de 48 arestas é formado somente por faces triangulares, quadrangulares e hexagonais. Sabe-se que os números de faces triangulares, quadrangulares e hexagonais desse poliedro são diretamente proporcionais a 2, 3 e 5, respectivamente. Determine o total de vértices desse poliedro.

04. Numa publicação cientifica de 1985, foi divulgada a descoberta de uma molécula tridimensional de carbono, na qual os átomos ocupam os vértices de um poliedro convexo cujas faces são 12 pentágonos e 20 hexágonos regulares, como numa bola de futebol. Em homenagem ao arquiteto norte-americano Buckminster Fuller, a molécula foi denominada fulereno. Determine o numero de átomos de carbono nessa molécula e o numero de ligações entre eles.

05. (UERJ) Um icosaedro regular tem 20 faces e 12 vértices, a partir dos quais retiram-se 12 pirâmides congruentes. As medidas das arestas dessas pirâmides são iguais a 1/3 da aresta do icosaedro. O que resta é um tipo de poliedro usado na fabricação de bolas. Observe as figuras



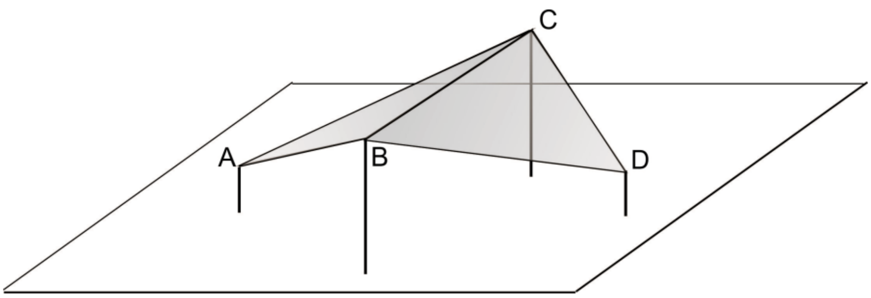
Para confeccionar uma bola de futebol, um artesão usa esse novo poliedro, no qual cada gomo é uma face. Ao costurar dois gomos para unir duas faces do poliedro, ele gasta 7 cm de linha. Depois de pronta a bola, o artesão gastou, no mínimo, um comprimento de linha igual a:

a) 7,0 m b) 6,3 m c) 4,9 m d) 2,1 m

06. (UEM /11) As arestas de um cubo medem 10 cm. De cada um de seus vértices, retira-se uma pirâmide de base triangular, cujas arestas ligadas ao vértice do cubo possuem todas as mesmas medida a e são partes das arestas do cubo. Após a remoção das pirâmides, obtém-se um poliedro convexo P. Baseando-se nessas informações, assinale o que for correto.

(01) Se $a < 5$ cm, o poliedro P tem 14 faces.
(02) Se $a < 5$ cm, o poliedro P tem 36 arestas.
(03) Se $a < 5$ cm, o poliedro P tem 24 vértices.
(04) Se $a = 5$ cm, o poliedro P tem 30 arestas.
(05) Se $a = 5$ cm, o poliedro P tem 16 vértices.

07. (Insper/11) A cobertura de uma barraca de praia, feita de lona, é constituída de dois triângulos eqüiláteros *ABC* e *BCD*, com o lado comum *BC* medindo 4 m. Estando a barraca montada, como representado na figura, os vértices A e D ficam a 1 m do chão, enquanto os vértices B e C ficam a 2 m do chão.



Nessas condições, quando os raios solares incidirem perpendicularmente ao plano do chão, a área da sombra da barraca projetada no chão, em m^2, será

a) $4\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{11}$ c) $4\sqrt{15}$ d) $8\sqrt{3}$ e) $8\sqrt{11}$

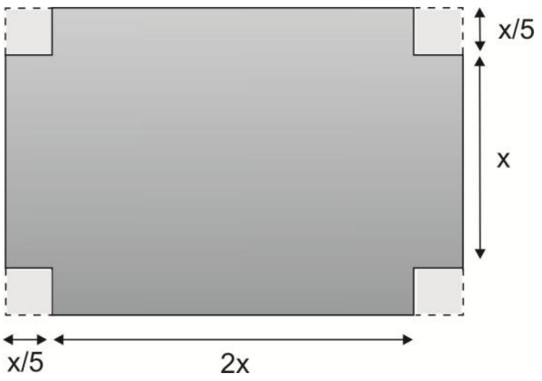
08. Considere um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em B, dentro do qual se inscreve um circunferência de centro O. Pelo ponto O traça-se um segmento OP perpendicular ao plano desse triângulo. Se $AB = 3$, $BC = 4$ e o plano APC forma um ângulo de 45º com o plano do triângulo, calcule a medida BP.

09. Um segmento AB de 8 m de comprimento está contido em um plano α. Um ponto P, exterior ao plano, está a 12 m de AB. Calcule a distancia de P ao plano α sabendo que $PA = PB$ e que a projeção P' do ponto P sobre o plano α está a 5 m de B.

Prismas

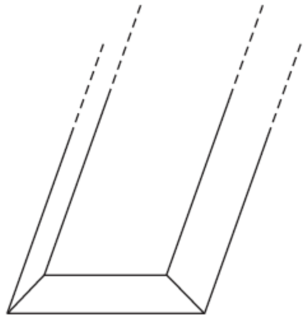
10. (Unicamp/06) Um cidadão precavido foi fazer uma retirada de dinheiro em um banco. Para tanto, levou sua mala executiva, cujo interior tem 56 cm de comprimento, 39 cm de largura e 10 cm de altura. O cidadão só pretende carregar notas de R$ 50,00. Cada nota tem 140 mm de comprimento, 65 mm de largura, 0,2 mm de espessura e densidade igual a 0,75 g/cm^3.
a) Qual é a máxima quantia, em reais, que o cidadão poderá colocar na mala?
b) Se a mala vazia pesa 2,6 kg, qual será o peso da mala cheia de dinheiro?

11. (Unicamp//01) A figura abaixo é a planificação de uma caixa sem tampa:



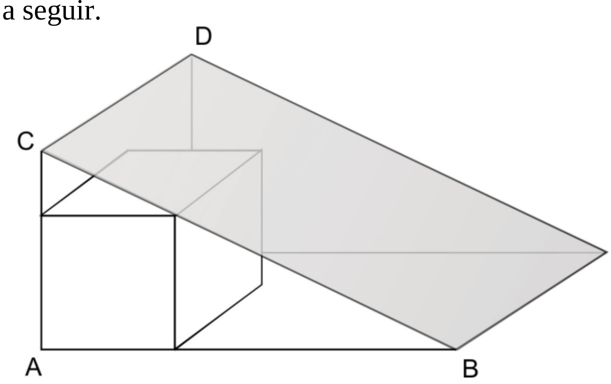
a) Encontre o valor de x, em centímetros, de modo que a capacidade dessa caixa seja de 50 litros.
b) Se o material utilizado custa R$ 10,00 por metro quadrado, qual é o custo de uma dessas caixas de 50 litros considerando-se apenas o custo da folha retangular plana?

12. (Unicamp/08) Em uma estrada de ferro, os dormentes e os trilhos são assentados sobre uma base composta basicamente por brita. Essa base (ou lastro) tem uma seção trapezoidal, conforme representado na figura abaixo. A base menor do trapézio, que é isósceles, tem 2 m, a base maior tem 2,8 m e as arestas laterais têm 50 cm de comprimento. Supondo que um trecho de 10 km de estrada deva ser construído, responda às seguintes questões.



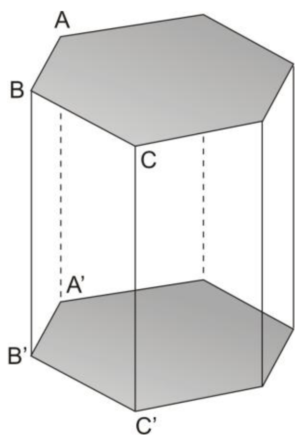
a) Que volume de brita será gasto com o lastro nesse trecho de ferrovia?
b) Se a parte interna da caçamba de um caminhão basculante tem 6 m de comprimento, 2,5 m de largura e 0,6 m de altura, quantas viagens de caminhão serão necessárias para transportar toda a brita?

13. (Unicamp/03) Uma caixa d'água **cúbica**, de volume máximo, deve ser colocada entre o telhado e a laje de uma casa, conforme mostra a figura a seguir.

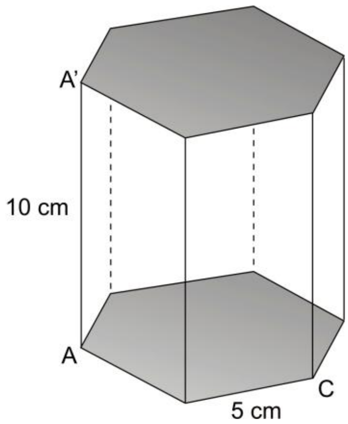


Dados: $AB = 6$ m, $AC = 1{,}5$ e $CD = 4$.
a) Qual deve ser o comprimento de uma aresta da caixa?
b) Supondo que a altura máxima da água na caixa é de 85% da altura da caixa, quantos litros de água podem ser armazenados na caixa?

14. A figura a seguir apresenta um prisma hexagonal regular. Obtenha a razão entre o volume do prisma triangular, cujas bases são os triângulos ABC e A'B'C' e o volume total do prisma hexagonal.



15. (Unicamp/05) A figura ao lado apresenta um prisma reto cujas bases são hexágonos regulares. Os lados dos hexágonos medem 5 cm cada um e a altura do prisma mede 10 cm.

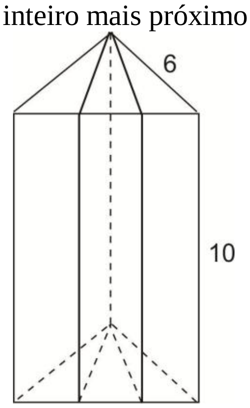


a) Calcule o volume do prisma.
b) Encontre a área da secção desse prisma pelo plano que passa pelos pontos *A*, *C* e *A*'.

16. As diagonais de três faces diferentes de um paralelepípedo retangular medem $\sqrt{61}$, $\sqrt{74}$ e $\sqrt{85}$. Calcule o seu volume.

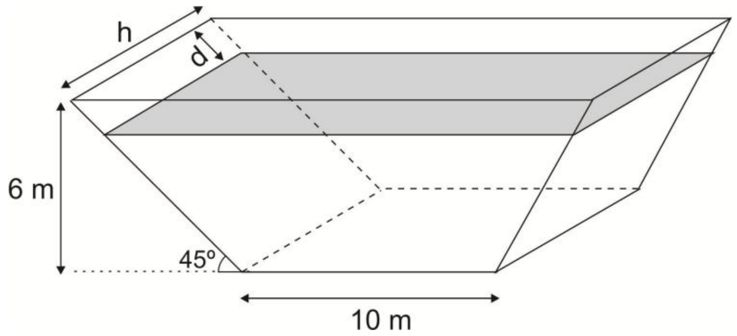
17. (UFOP/09) Um cubo é seccionado por um plano que passa por uma das diagonais de sua base inferior e por um único vértice de sua base superior. Sabendo que o valor da área da região determinada pela intersecção entre o cubo e o plano é igual a $\frac{\sqrt{6}}{4}$ cm^2 calcule o comprimento de uma das diagonais do cubo.

18. Um queijo tem a forma de um prisma triangular reto, de altura 10 cm, e base de lados medindo 6 cm. Ele é dividido em três prismas triangulares, de mesmo volume, por dois planos perpendiculares à base e passando por um mesmo vértice da base (veja a ilustração a seguir). Determine as áreas (em centímetros quadrados) das superfícies dos prismas assim obtidos e indique metade do inteiro mais próximo da menor delas.



Dados: $\sqrt{3} \cong 1,73$ e $\sqrt{7} \cong 2,65$

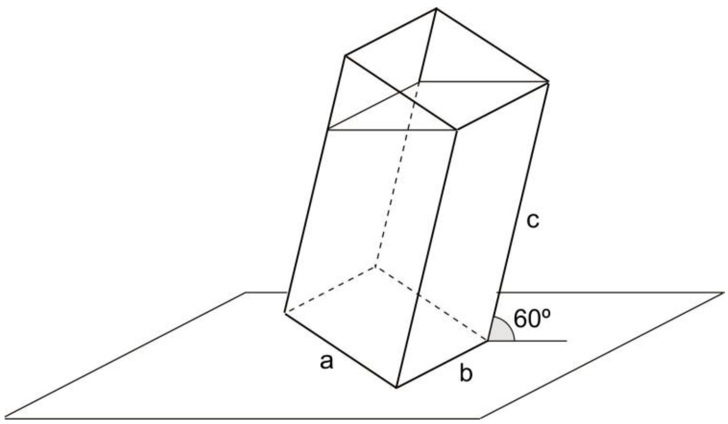
19. (MACK/05)



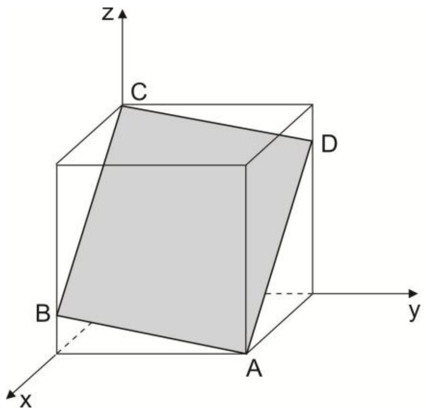
A figura acima representa uma caçamba com água, na qual as laterais oblíquas e o piso são retangulares e as laterais paralelas têm o formato de trapézios isósceles. Se $d = \sqrt{2}$ m, a razão entre o volume de água e o volume total da caçamba é

a) $\frac{17}{25}$ b) $\frac{21}{32}$ c) $\frac{25}{28}$ d) $\frac{17}{28}$ e) $\frac{25}{32}$

20. (UFRJ) Uma caixa sem tampa, completamente cheia de leite, tem a forma de um Paralelepípedo retângulo de dimensões internas a = 10 cm, b = 7 cm e c = 16 cm. Inclina-se a caixa de 60º em relação ao plano horizontal de modo que apenas uma das menores arestas fique em contato com o plano, como mostra a figura. Qual o volume do leite derramado?



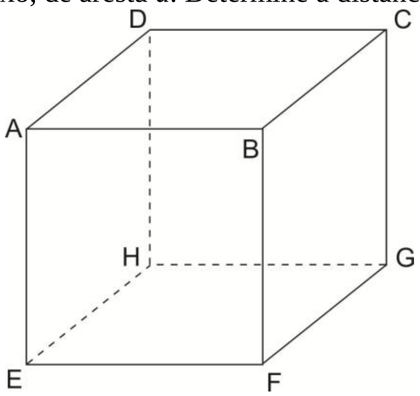
21. (UERJ/01) Observe a figura abaixo.



Ela representa um cubo de aresta 2, seccionado pelo plano ABCD; $B = (2, 0, t)$ e t varia no intervalo $[0, 2]$. Determine a menor área do quadrilátero ABCD.

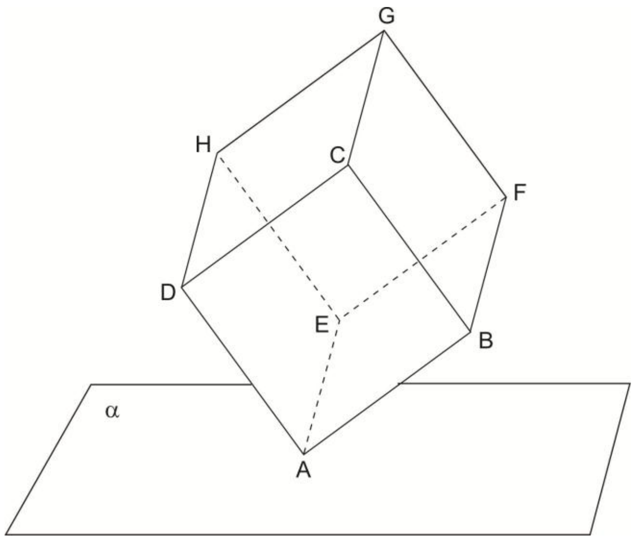
22. (UFPE/09) Qual a distância entre um vértice de um cubo, com aresta medindo $20\sqrt{6}$, e uma das diagonais do cubo que não passam por esse vértice.

23. Considere o cubo ABCDEFGH abaixo, de aresta *a*. Determine a distância entre os segmentos $\overline{AG}$ e $\overline{HF}$.



a) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ c) $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ d) $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ e) $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

24. (Olimpíada Paulista/06) Na figura a seguir, *ABCDEFGH* é um cubo de aresta 5, sendo que o vértice *A* pertence a um plano α. As distâncias dos vértices *B* e *E* ao plano α são iguais a 3.

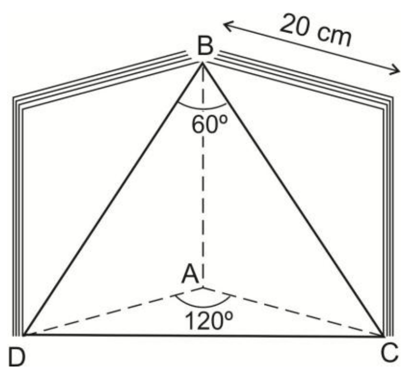


a) Calcule a distância do vértice *F* ao plano α.
b) Mostre que o plano determinado pelos pontos *A*, *D* e *F* é perpendicular ao plano α.
c) Prove que a reta *CH* é paralela ao plano α e calcule a sua distância a esse plano.

Pirâmides

25. (Olimpíada Paulista/02 - adaptada) Uma pirâmide de base quadrada *ABCD* e vértice *V* tem todas as arestas com medida 1 m. Um plano, passando pela aresta *AB*, corta as arestas *VC* e *VD* nos pontos *P* e *Q*, respectivamente, dividindo a pirâmide em dois sólidos S_1 e S_2.
a) Dê o numero de vértices, de faces e de arestas S_1 e S_2.
b) Calcule o volume da pirâmide *VABCD*

26. (Unicamp/08) Suponha que um livro de 20 cm de largura esteja aberto conforme a figura abaixo, sendo $D\hat{A}C = 120°$ e $D\hat{B}C = 60°$



a) Calcule a altura *AB* do livro.
b) Calcule o volume do tetraedro de vértices *A*, *B*, *C* e *D*.

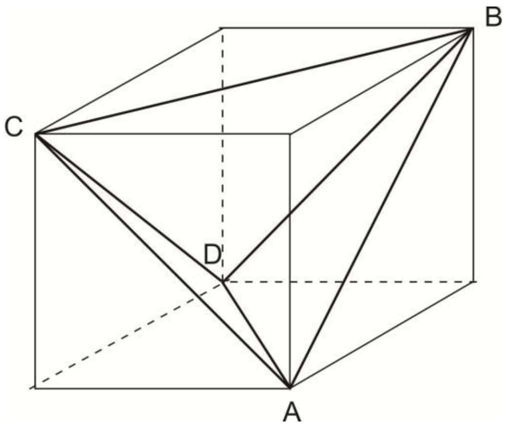
27. O volume de uma pirâmide cuja base é um triângulo equilátero de lado 6 e cujas arestas laterais tem medida $\sqrt{15}$ vale:

a) 9 b) 9/2 c) 27/2 d) $9\sqrt{3}/2$ e) nda

28. (Unicamp/92) Dado um cubo de aresta ℓ. Qual é o volume do octaedro cujos vértices são os centros das faces do cubo?

29. (Unicamp/03) Considere um cubo cuja aresta mede 10 cm. O sólido cujos vértices são os centros das faces do cubo é um octaedro regular, cujas faces são triângulos eqüiláteros congruentes.
a) Calcule o comprimento da aresta desse octaedro regular.
b) Calcule o volume do mesmo octaedro.

30. (UERJ/96) Com os vértices A, B, C e D de um cubo de aresta a, construiu-se um tetraedro regular, como mostra a figura abaixo:

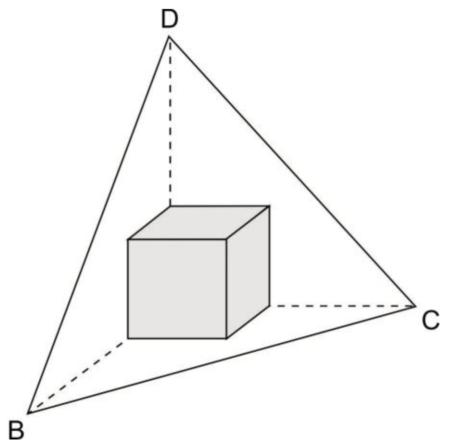


Calcule:
a) o volume da pirâmide ABCD em função de a.
b) a razão entre os volumes do tetraedro ABCD e do cubo

31. (Espcex/96) Uma pirâmide regular de base hexagonal e altura $h = 2\sqrt{3}$ cm é seccionada por um plano perpendicular à sua base, de tal modo que a secção gerada tem a maior área possível. Sabendo-se que a área de secção é $5\sqrt{3}$ cm^2, o volume da pirâmide, em cm^3, é:

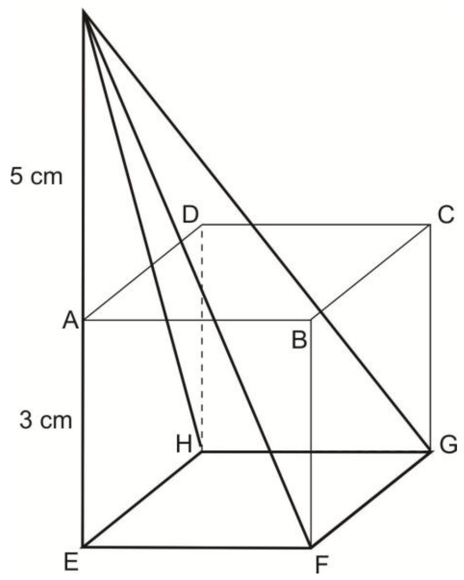
a) $\frac{25}{2}$ b) $\frac{50}{3}$ c) $\frac{75}{4}$ d) $\frac{125}{3}$ e) $\frac{70}{3}$

32. (UFRJ/10) A pirâmide *ABCD* é tal que as faces *ABC*, *ABD* e *ACD* são triângulos retângulos cujos catetos medem *a*. Considere o cubo de volume máximo contido em *ABCD* tal que um de seus vértices seja o ponto *A*, como ilustra a figura ao lado.



Determine a medida da aresta desse cubo em função de *a*.

33. (UEL/07) Considere o cubo de aresta 3 cm e vértices *ABCDEFG*. Considere o ponto *P* situado no prolongamento da aresta *EA* de modo que *PA* = 5 cm, como está representado na figura.



A maior e a menor aresta lateral da pirâmide PEFGH medem, respectivamente:

a) $\sqrt{82}$ e 8 cm
b) $\sqrt{82}$ e 4 cm
c) $\sqrt{43}$ e 8 cm
d) 20 cm e 10 cm
e) 12 cm e 8 cm

34. (Unicamp/95) Uma pirâmide regular, de base quadrada, tem altura igual a 20 cm. Sobre a base dessa pirâmide constrói-se um cubo de modo que a face oposta à base do cubo corte a pirâmide em um quadrado de lado igual a 5 cm. Faça uma figura representativa dessa situação e calcule o volume do cubo.

35. Uma pirâmide tem uma base quadrada de lado 1 e suas faces laterais são triângulos equiláteros. Um cubo é colocado no interior da pirâmide de tal modo que uma face do cubo está sobre a base da pirâmide e a face oposta tem todas as arestas sobre as faces laterais da pirâmide. Qual o volume desse cubo?

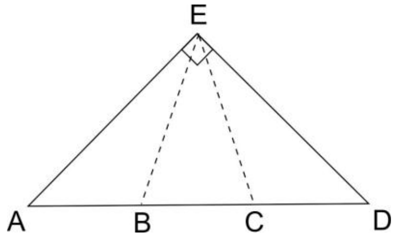
a) $5\sqrt{2}-7$ b) $7-4\sqrt{3}$ c) $\frac{2\sqrt{2}}{27}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{9}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

36. (Olimpíada Cearense) Duas pirâmides regulares, uma quadrangular e outra hexagonal, têm bases inscritas numa mesma circunferência de raio R e volumes iguais. Determine a relação entre as alturas das duas pirâmides.

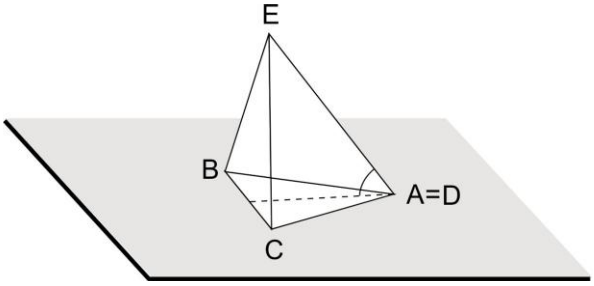
37. (Unicamp/00) Seja P um ponto do espaço eqüidistante dos vértices A, B e C de um triângulo cujos lados medem 8 cm, 8 cm e 9,6 cm. Sendo $d(P, A) = 10\,\text{cm}$, calcule:

a) o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC;
b) a altura do tetraedro, não regular, cujo vértice é o ponto P e cuja base é o triângulo ABC.

38. (UERJ/01)

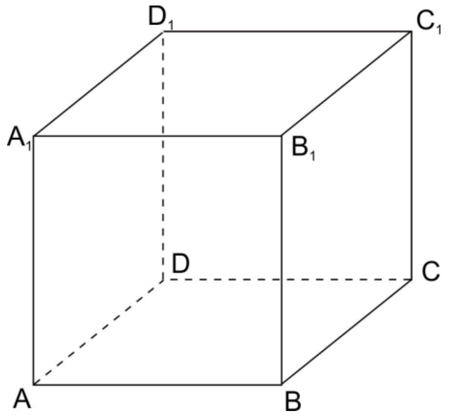


A figura acima representa uma chapa de metal com a forma de um triângulo retângulo isósceles em que $AB = BC = CD = 2\,\text{m}$. Dobrando-a nas linhas BE e CE, constrói-se um objeto que tem a forma de uma pirâmide.



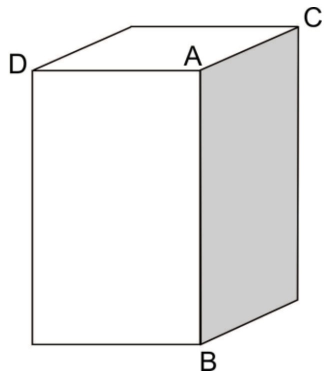
Desprezando a espessura da chapa, calcule o cosseno do ângulo formado pela aresta AE e o plano ABC.

39. (Unicamp/02) O sólido da figura ao lado é um cubo cuja aresta mede 2 cm.



a) Calcule o volume da pirâmide $ABCD_1$.
b) Calcule a distância do vértice A ao plano que passa pelos pontos B, C e D_1.

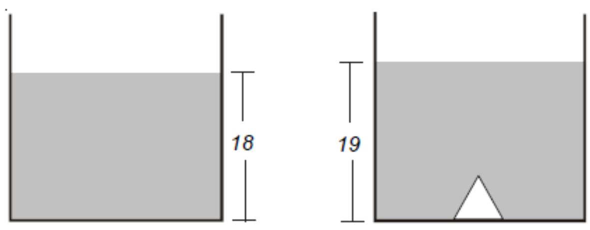
40. (UESPI/12) Um paralelepípedo retângulo tem por base um quadrado com lado medindo 6 cm e tem altura 8 cm, conforme a ilustração a seguir.



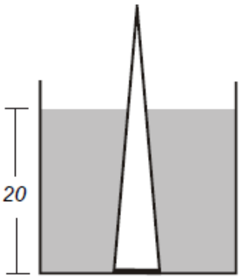
Qual a distância entre o vértice A e o plano passando pelos vértices B, C e D?

a) $21/\sqrt{41}$ b) $22/\sqrt{41}$ c) $23/\sqrt{41}$ d) $24/\sqrt{41}$ e) $25/\sqrt{41}$

41. (UFRJ/06) Em um tanque no formato de um cubo de aresta 25 cm, contendo líquido, foi posta uma pirâmide P_1, de altura igual a 6cm, com a base apoiada no fundo do tanque. Com isso, o nível de líquido passou de 18 cm para 19 cm

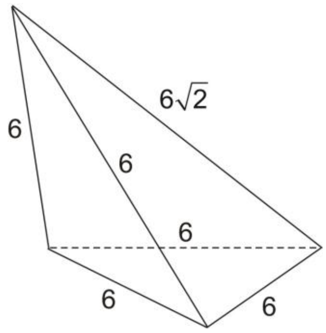


a) Calcule o volume, em cm^3, da pirâmide P_1.
b) A pirâmide P_1 foi retirada do tanque e o nível de líquido voltou ao inicial. Uma pirâmide P_2, de 30cm de altura, foi então posta no tanque, com a base apoiada no fundo, o que elevou em 2 cm o nível de líquido.



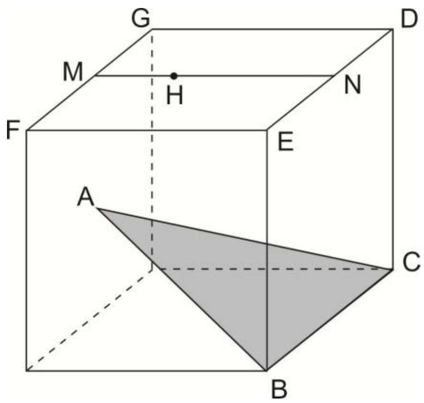
Determine o volume da pirâmide P_2.

42. (UESPI) Um tetraedro tem cinco arestas medindo 6 cm, e a sexta aresta mede $6\sqrt{2}$, conforme a figura abaixo. Qual o volume do tetraedro?



a) 28 cm^3 b) $19\sqrt{2}$ cm^3 c) 26 cm^3 d) 27 cm^3 e) $18\sqrt{2}$ cm^3

43. Na figura a seguir, considere o cubo de aresta de medida 2 cm e faces adjacentes *BCDE* e *DEFG*. Nesse cubo, o ponto *A* localiza-se no centro da face oposta à face *BCDE*, *N* e *M* são pontos médios das arestas $\overline{DE}$ e $\overline{GF}$, respectivamente, e *H* pertence ao segmento $\overline{MN}$



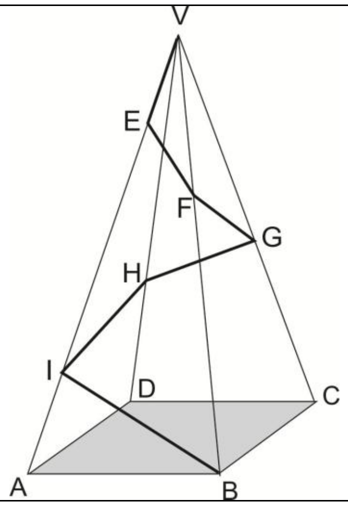
a) Calcule a medida da área do triângulo *ABC*
b) Sabendo que $\overline{AH}$ é a altura da pirâmide *HABC* de base triangular *ABC*, determine o valor da medida do volume dessa pirâmide.

44. A base *ABCD* de uma pirâmide *VABCD* é um trapézio, com $\overline{AB} // \overline{CD}$. Projeta-se esse sólido sobre um plano perpendicular a $\overline{AB}$, e se obtém um triângulo de área 20 cm². Se *AB* = 12 e *CD* = 6, calcule o volume da pirâmide.

45. Considere uma pirâmide de vértice *V* e cuja base é o triângulo *ABC*, com $OA = AB = AC = 15$, $OB = OC = \sqrt{198}$ e $BC = 2\sqrt{29}$. Calcule o volume.

46. (UFC/02) Sejam P_1 e P_2 dois pontos quaisquer interiores a um tetraedro regular. Sejam d_1, a soma das distâncias de P_1 às faces do tetraedro regular, e d_2, a soma das distâncias de P_2 às faces do tetraedro regular. Mostre que $d_1 = d_2$.

47. Uma pirâmide tem por base um quadrado *ABCD* com lado 2 e faces laterais que são triângulos isósceles congruentes. Saindo do vértice *V*, pode-se percorrer *VEFGHIBA* onde *E, F, G, H, I* estão nas arestas *VA, VB, VC, VD* e *VA* respectivamente e *VE* = *EF* = *FG* = *GH* = *HI* = *IB* = 2 (veja ilustração). Indique o inteiro mais próximo do volume da pirâmide



Dados: $\text{tg}(6\pi/13) = 8{,}24$ e $\sec(6\pi/13) = 8{,}30$
Sugestão: refaça o percurso *VEFGHIBA* no triângulo *VAB*, para determinar o ângulo $A\hat{V}B$

Cilindros

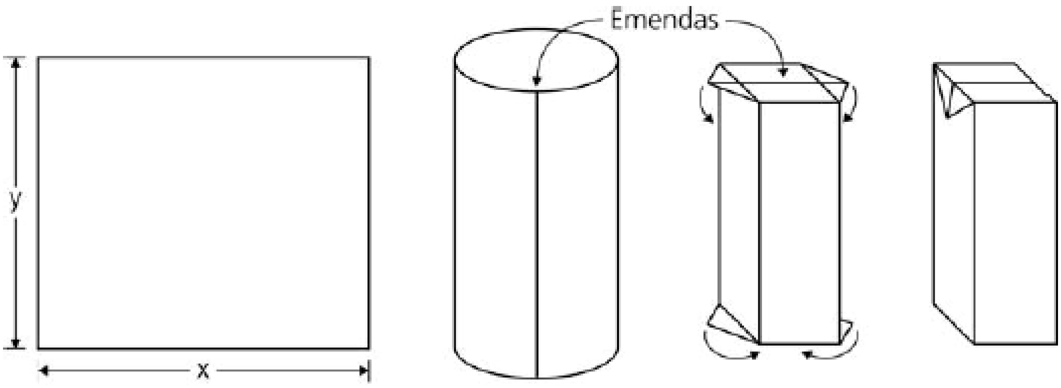
48. (UEL) O diretor de um clube deseja construir um poço, com formato cilíndrico, de 10,0 m de profundidade e diâmetro interior igual a 1,0 m. Se a parede desse poço for construída com alvenaria na espessura de 0,2 m, o volume desta alvenaria será igual a:

a) $2{,}4\pi$ m³
b) $5{,}6\pi$ m³
c) $6{,}5\pi$ m³
d) $7{,}0\pi$ m³
e) $8{,}0\pi$ m³

49. (Unicamp/89) Um copo cilíndrico tem altura h e base de raio r. A quantidade de água necessária para encher totalmente esse copo encheria parcialmente, totalmente, ou faria transbordar outro copo cilíndrico de altura 2h e base de raio r/2? Explique por quê.

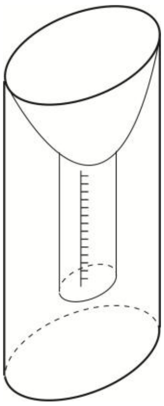
50. (Unicamp/91) Começando com um cilindro de raio 1 e altura também 1, define-se o procedimento de colocar sobre o cilindro anterior um outro cilindro de igual altura e raio 2/3 do raio do anterior. Embora a altura do sólido fictício resultante seja infinita, seu volume pode ser calculado. Faça esse cálculo

51. (Unicamp/11) A caixa de um produto longa vida é produzida como mostra a sequência de figuras abaixo. A folha de papel da figura 1 é emendada na vertical, resultando no cilindro da figura 2. Em seguida, a caixa toma o formato desejado, e são feitas novas emendas, uma no topo e outra no fundo da caixa, como mostra a figura 3. Finalmente, as abas da caixa são dobradas, gerando o produto final, exibido na figura 4. Para simplificar, consideramos as emendas como linhas, ou seja, desprezamos a superposição do papel.



a) Se a caixa final tem 20 cm de altura, 7,2 cm de largura e 7 cm de profundidade, determine as dimensões *x* e *y* da menor folha que pode ser usada na sua produção.
b) Supondo, agora, que uma caixa tenha seção horizontal quadrada (ou seja, que sua profundidade seja igual a sua largura), escreva a fórmula do volume da caixa final em função das dimensões *x* e *y* da folha usada em sua produção.

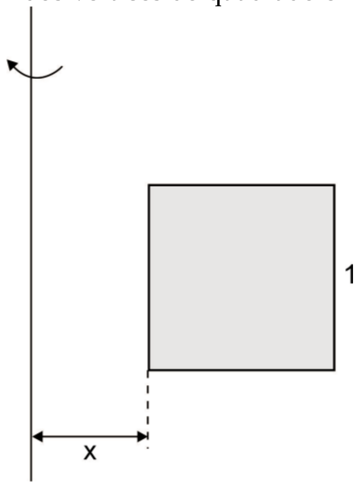
52. (Unicamp/07) Um pluviômetro é um aparelho utilizado para medir a quantidade de chuva precipitada em determinada região. A figura de um pluviômetro padrão é exibida ao lado. Nesse pluviômetro, o diâmetro da abertura circular existente no topo é de 20 cm. A água que cai sobre a parte superior do aparelho é recolhida em um tubo cilíndrico interno. Esse tubo cilíndrico tem 60 cm de altura e sua base tem 1/10 da área da abertura superior do pluviômetro. (Obs.: a figura ao lado não está em escala).



a) Calcule o volume do tubo cilíndrico interno.
b) Supondo que, durante uma chuva, o nível da água no cilindro interno subiu 2 cm, calcule o volume de água precipitado por essa chuva sobre um terreno retangular com 500m de comprimento por 300m de largura.

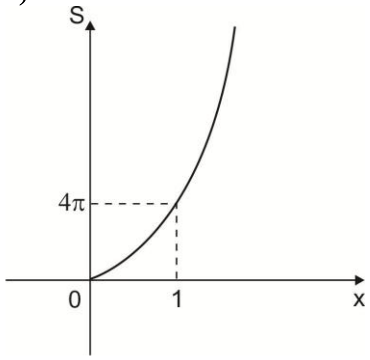
53. Determine o volume de um pirâmide quadrangular regular inscrita em um cilindro circular reto cujo raio da base é 4 cm e cuja altura é 9 cm.

54. (IBMEC/11) Um quadrado de lados medindo 1 cm sofre uma rotação completa em torno de um eixo paralelo a um de seus lados. A distância desse eixo a um dos vértices do quadrado é x cm, como mostra a figura.

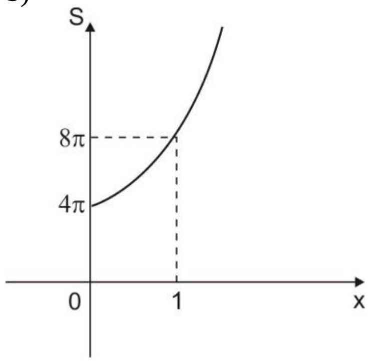


O gráfico que melhor representa a área total S do sólido gerado por essa rotação, em cm^2, em função de x, para $x \geq 0$, é:

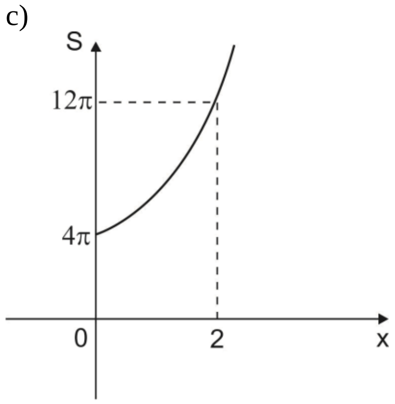
a)



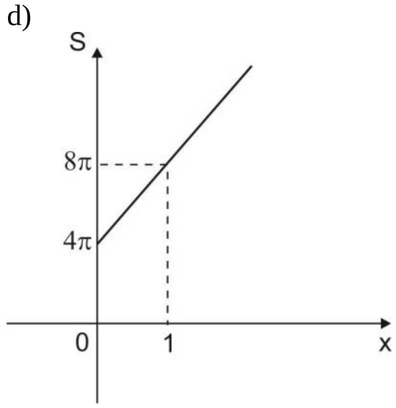
b)



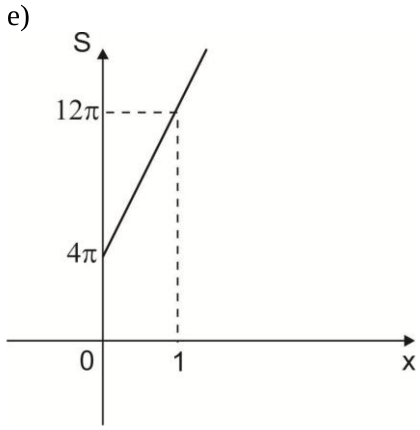
c)



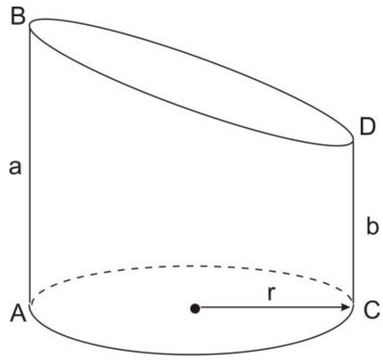
d)



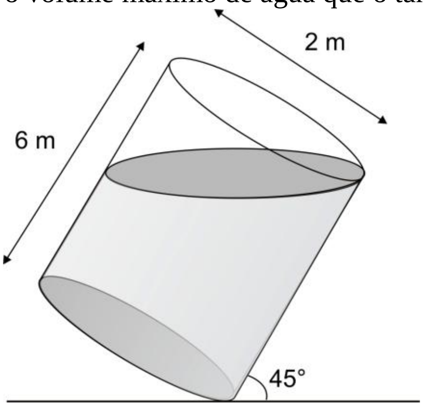
e)



55. (Unicamp/93) Um cilindro circular reto é cortado por um plano não paralelo à sua base, resultando no sólido ilustrado na figura. Calcule o volume desse sólido em termos do raio da base r, da altura máxima $AB = a$ e da altura mínima $CD = b$. Justifique seu raciocínio



56. (UFU/99) Considere um tanque cilíndrico de 6 metros de comprimento e 2 metros de diâmetro que está inclinado em relação ao solo em 45°, conforme mostra a figura abaixo. Sabendo-se que o tanque é fechado na base que toca o solo e aberto na outra, qual é o volume máximo de água que o tanque pode conter antes de derramar?



57. (UEL/05) Um designer deseja projetar um recipiente para perfume no formato da figura 1 a seguir. O recipiente é resultado da intersecção de 2 cilindros iguais com 10 cm de altura cada um, cujas bases possuem raio igual a 6 cm. Sabe-se que o segmento de reta AB, representado na figura 2 a seguir, une a intersecção das circunferências das bases de centros C_1 e C_2 e passa exatamente pelo ponto médio do segmento C_1C_2. É correto afirmar que o recipiente comportará um volume igual a:

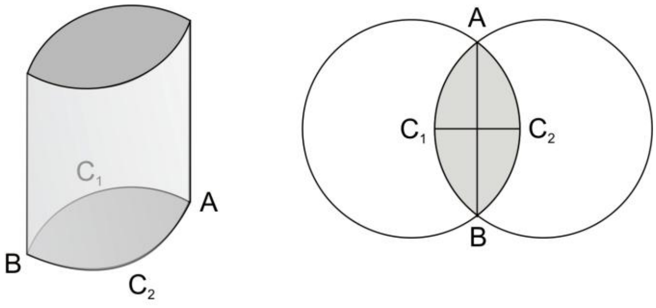
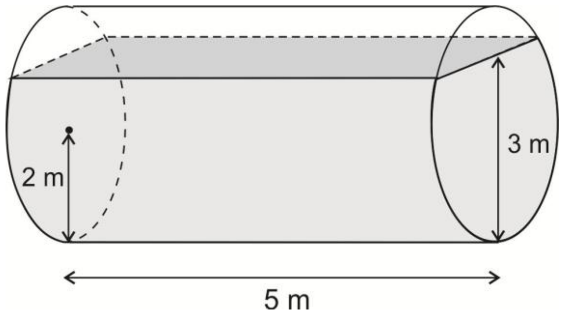


Figura 1 Figura 2

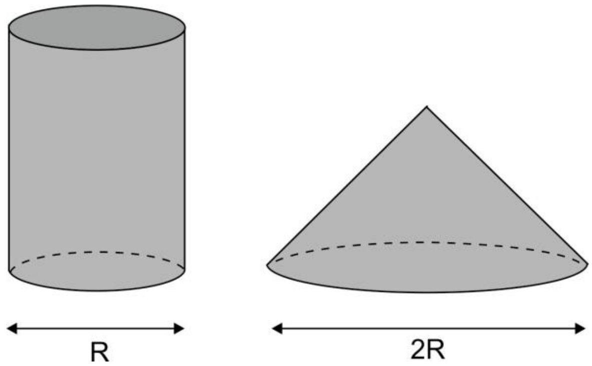
a) $240\pi - 360\sqrt{3}\ cm^3$
b) $240\pi - 180\sqrt{3}\ cm^3$
c) $120\pi - 180\sqrt{3}\ cm^3$
d) $120\pi - 90\sqrt{3}\ cm^3$
e) $60\pi - 270\sqrt{3}\ cm^3$

58. (UFPE) O reservatório em forma de cilindro reto de raio da base 2 m e altura 5 m encontra-se na horizontal e preenchido com água até o nível de 3 m, conforme ilustrado na figura a seguir. Calcule o volume, em m^3, de água no reservatório e arredonde para o inteiro mais próximo do valor obtido.



Cones

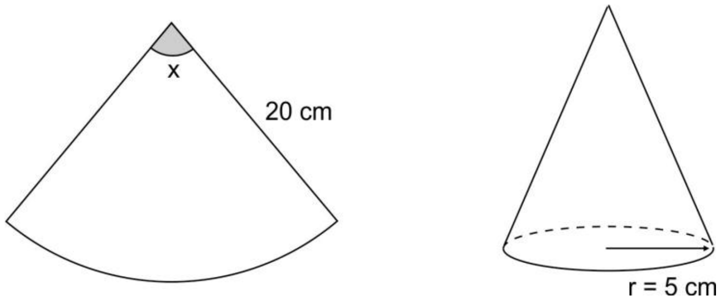
59. (Unicamp/11) Depois de encher de areia um molde cilíndrico, uma criança virou-o sobre uma superfície horizontal. Após a retirada do molde, a areia escorreu, formando um cone cuja base tinha raio igual ao dobro do raio da base do cilindro.



A altura do cone formado pela areia era igual a
a) 3/4 da altura do cilindro.
b) 1/2 da altura do cilindro.
c) 2/3 da altura do cilindro.
d) 1/3 da altura do cilindro.

60. (UFRJ/93) Um cone circular reto é feito de uma peça circular de papel de 20 cm de diâmetro, cortando-se fora um setor de $\pi/5$ radianos. Calcule a altura do cone obtido.

61. (UEL/09) Uma chapa com forma de um setor circular de raio 20 cm e ângulo de x graus é manuseada para se transformar num cone. Se o raio da base do cone obtido é r = 5 cm, então o valor de x é:



a) 60º b) 75º c) 80º d) 85º e) 90º

62. (UFRGS/05) Um cone circular reto é tal que cada seção obtida pela interseção de um plano que passa por seu vértice e pelo centro da sua base é um triângulo retângulo de catetos iguais. Se cortarmos esse cone ao longo de uma geratriz, abrindo e planificando sua superfície lateral, será obtido um setor circular cujo ângulo central tem medida α. Então,

a) $\alpha < 180º$
b) $180º \le \alpha < 200º$
c) $200º \le \alpha < 220º$
d) $220º \le \alpha < 240º$
e) $\alpha \ge 240º$

63. (ITA) O volume do sólido gerado por um triângulo, que gira em torno de sua hipotenusa cujos catetos são 15 cm e 20 cm, é:

a) 1080π cm^3
b) 960π cm^3
c) 1400π cm^3
d) 1600π cm^3
e) nenhuma das respostas anteriores

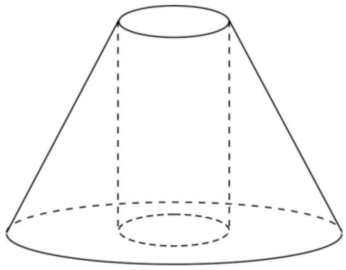
64. (Unifei/09) Achar o volume (em unidades de volume) do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo das ordenadas, da área limitada pelas retas $x+2y-4=0$, $2x+3y-6=0$ e $y=0$.

65. (Unicamp/98) a) Qual é o valor de λ na equação: $z^3-5z^2+8z-\lambda=0$ de modo que $z=3$ seja uma raiz dessa equação?

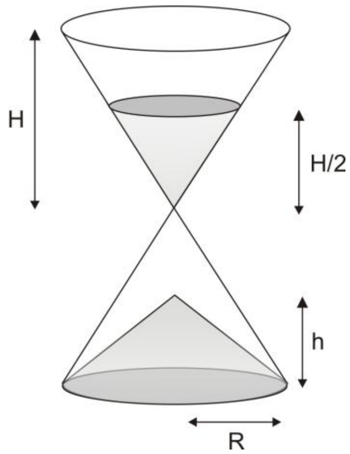
b) Para esse valor de λ, ache as três raízes z_1, z_2, z_3 dessa equação.

c) Ache o volume do sólido obtido quando a região triangular cujos vértices são os pontos z_1, z_2, z_3 gira em torno da reta de equação $x=1$.

66. (UFPE) Perfurando-se um sólido em forma de cone reto, com raio da base medindo 4 cm e altura 8 cm, simetricamente ao longo do seu eixo, com uma boca cilíndrica de 2 cm de raio, obtém-se um sólido com a forma ilustrada na figura abaixo, cujo volume é V cm^3. Determine o inteiro mais próximo de V.



67. (UFBA/2004) Considere um recipiente de vidro com a forma de dois cones congruentes de altura H, raio da base R e vértice comum. Sabe-se que, inicialmente, um dos cones está completamente cheio de areia, e o outro, totalmente vazio. A areia é então redistribuída, de modo a formar, na parte superior do recipiente, um cone de altura $H/2$ e, na parte inferior, outro cone, de altura h e raio da base R, conforme a figura.



Com base nessas informações, determine a razão h/H

68. (UFMG) Seja S um sólido que está contido entre dois planos paralelos, α e β, e que intercepta esses planos. Denote por A(x) a área da seção obtida pela interseção de S com um plano paralelo a α e cuja distância a α seja x. Se para cada x tem-se $A(x) = ax^2 + bx + c$, com $0 \leq x < h$, em que h é a distância entre α e β, então o volume V de S pode ser calculado usando-se a fórmula

$$V = \frac{h}{6}\left[A(0) + 4A\left(\frac{h}{2}\right) + A(h)\right]$$

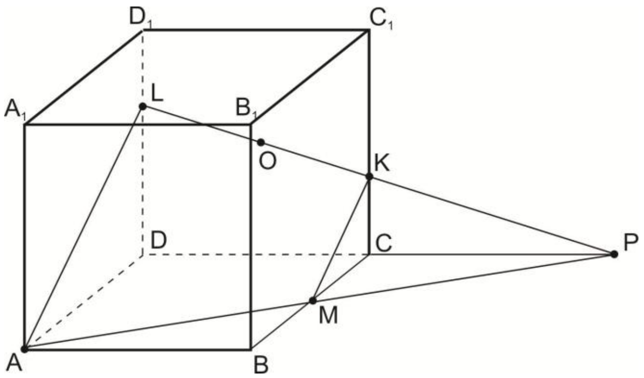
a) Determine a expressão de A(x) na situação em que S é um cone circular reto de altura H e raio da base R.
b) Usando a fórmula dada no texto, calcule, em função de H e R, o volume V do cone S do item a).

69. Um cone circular reto tem um base de raio 600 cm e sua altura é $200\sqrt{7}$ cm. Uma formiga está inicialmente em um ponto de uma geratriz do cone que dista 125 cm do vértice e caminha sobre a superfície até um ponto da geratriz oposta que dista $375\sqrt{2}$ cm do vértice. Determine a menor distância que a formiga poderia percorrer para executar esse trajeto.
Obs: geratrizes opostas são aquelas que tem extremidades em pontos da base que sejam diametralmente opostos.

70. Sobre duas geratrizes diametralmente opostas de um cone equilátero, tomam-se os pontos M e N tais que $AM = 8$ e $AN = 6$. Calcule o comprimento do menor percurso de M até N sobre a superfície lateral do cone.
a) 10 b) 14 c) 21/2 d) 19/2 e) $7\sqrt{2}$

Troncos

71. (Unicamp/07) Seja $ABCDA_1B_1C_1D_1$ um cubo com aresta de comprimento 6 cm e sejam M o ponto médio de $\overline{BC}$ e O o centro da face CDD_1C_1, conforme mostrado na figura ao abaixo.
a) Se a reta $\overleftrightarrow{AM}$ intercepta a reta $\overleftrightarrow{CD}$ no ponto P e a reta $\overleftrightarrow{PO}$ intercepta $\overline{CC_1}$ e $\overline{DD_1}$ em K e L, respectivamente, calcule os comprimentos dos segmentos $\overline{CK}$ e $\overline{DL}$.
b) Calcule o volume do sólido com vértices A, D, L, K, C e M.

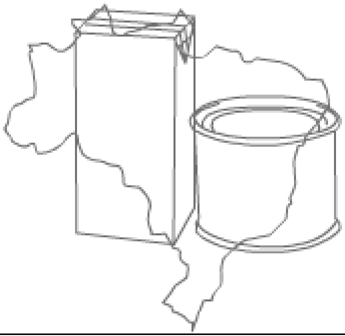


72. (UDESC/10) As embalagens acompanham o ser humano desde o dia em que ele descobriu a necessidade de transportar e proteger seus alimentos e mercadorias. É uma longa história, como retrata o texto abaixo.

1970 – O Brasil cresce

A industrialização crescente e o aumento de supermercados transformam a vida dos brasileiros e as embalagens. Tratando da relação dos supermercados com as embalagens é difícil dizer quem mais influenciou quem. Nascia então uma parceria que se consolidou através de décadas. Marcas tradicionais mudaram suas embalagens e se adequaram aos novos tempos.

Associação Brasileira de Embalagens – ABRE, 2007



Suponha que uma empresa está pesquisando o formato mais apropriado de uma nova embalagem para um determinado produto. Dentre os formatos selecionados estão um em forma de tronco de cone e outro em forma de um cilindro circular reto, conforme ilustra a Figura 1.

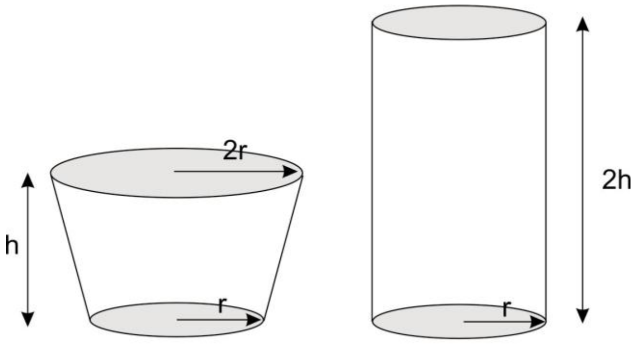
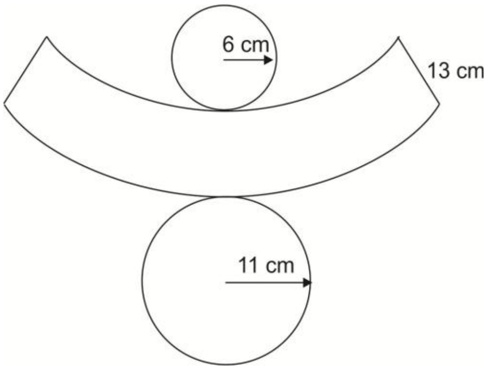


Figura 1 - Novas Embalagens

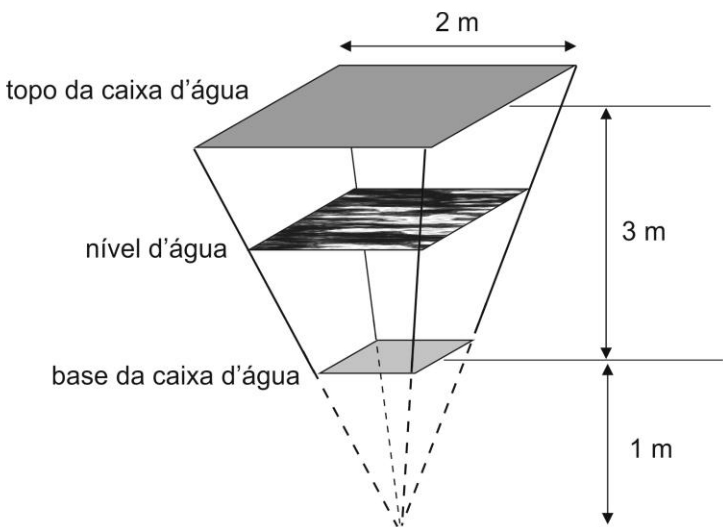
a) Levando em consideração a maior capacidade volumétrica, justifique com argumentos matemáticos coerentes qual dos dois recipientes é o mais adequado a tal capacidade.
b) Levando em consideração a preservação do meio ambiente, justifique com argumentos matemáticos coerentes qual destas embalagens é a mais econômica, supondo que o custo do material utilizado para a confecção é de R$ 3,00 por unidade de área e que $h = r$.

73. (Espcex/10) A figura abaixo representa a planificação de um tronco de cone reto com a indicação das medidas dos raios das circunferências das bases e da geratriz. A medida da altura desse tronco de cone é



a) 13 cm
b) 12 cm
c) 11 cm
d) 10 cm
e) 9 cm

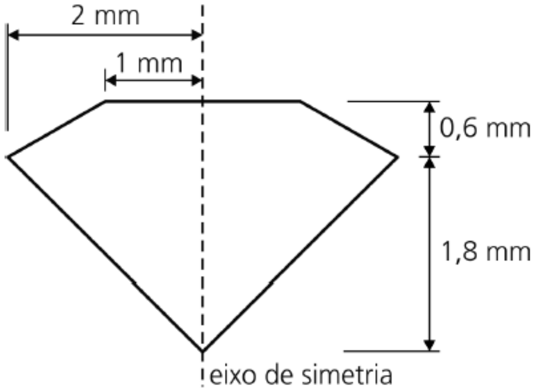
74. (Unicamp/09) Uma caixa d'água tem o formato de um tronco de pirâmide de bases quadradas e paralelas, como mostra a figura abaixo, na qual são apresentadas as medidas referentes ao interior da caixa.



a) Qual o volume total da caixa d'água?
b) Se a caixa contém (13/6) m^3 de água, a que altura de sua base está o nível d'água?

75. (Unicamp/96) Um tetraedro regular, cujas arestas medem 9 cm de comprimento, tem vértices nos pontos *A*, *B*, *C* e *D*. Um plano paralelo ao plano que contém a face *BCD* encontra as arestas *AB*, *AC* e *AD*, respectivamente, nos pontos *R*, *S* e *T*.
a) Calcule a altura do tetraedro *ABCD*.
b) Mostre que o sólido *ARST* também é um tetraedro regular.
c) Se o plano que contém os pontos *R*, *S* e *T* dista 2 centímetros do plano da face *BCD*, calcule o comprimento das arestas do tetraedro *ARST*.

76. (Unicamp/12) Um brilhante é um diamante com uma lapidação particular, que torna essa gema a mais apreciada dentre todas as pedras preciosas.



a) Em gemologia, um quilate é uma medida de massa, que corresponde a 200 mg. Considerando que a massa específica do diamante é de aproximadamente 3,5 g/cm^3, determine o volume de um brilhante com 0,7 quilate.
b) A figura ao lado apresenta a seção transversal de um brilhante. Como é muito difícil calcular o volume exato da pedra lapidada, podemos aproximá-lo pela soma do volume de um tronco de cone (parte superior) com o de um cone (parte inferior). Determine, nesse caso, o volume aproximado do brilhante.
Dica: o volume de um tronco de cone pode ser obtido empregando-se a fórmula

$$V=\frac{\pi}{3}h(R^2+Rr+r^2)$$

em que R e r são os raios das bases e h é a altura do tronco.

77. (Olimpíada Brasileira) O brinquedo favorito de Cícero é um cone reto de vidro com 5 cm de altura. Cícero encheu o cone com areia até a altura de 3 cm, como mostrado na figura 1. Em seguida, Cícero fechou a base do cone e virou-o de cabeça para baixo, como indicado na figura 2. A que altura da base do cone, em cm, ficou a marca de areia?

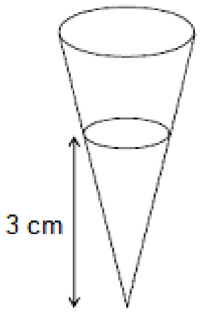


Figura 1

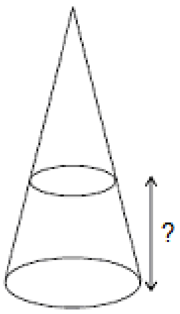
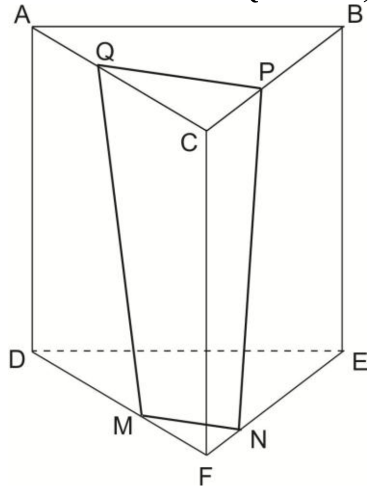


Figura 2

a) 1 b) 2 c) $5-\sqrt[3]{98}$ d) $\sqrt[3]{98}$ e) $1-\frac{\sqrt[3]{98}}{5}$

78. (FAU) Um cilindro e um tronco de cone (circulares retos) têm uma base comum e mesma altura. O volume do tronco é a metade do volume do cilindro. Determinar a razão entre o raio da base maior e o raio da base menor do tronco.

79. Um prisma ABCDEF tem altura 16 cm e suas bases são triângulos equiláteros. O prisma é inter-sectado por um plano que atravessa suas duas bases, determinando um tronco QOCMNF, conforme a figura abaixo



Se $FM = 4$, $FN = 2$ e $CQ = 8$, determine o volume desse tronco

80. (Unicamp/06) Um abajur de tecido tem a forma de um tronco de cone circular reto, com bases paralelas. As aberturas do abajur têm 25 cm e 50 cm de diâmetro, e a geratriz do tronco de cone mede 30 cm. O tecido do abajur se rasgou e deseja-se substituí-lo.
a) Determine os raios dos arcos que devem ser demarcados sobre um novo tecido para que se possa cortar um revestimento igual àquele que foi danificado.
b) Calcule a área da região a ser demarcada sobre o tecido que revestirá o abajur.

Esferas

81. (Unicamp/12) Um supermercado vende dois tipos de cebola, conforme se descreve na tabela abaixo:

Tipo de cebola	Peso unitário aproximado (g)	Raio médio (cm)
Pequena	25	2
Grande	200	4

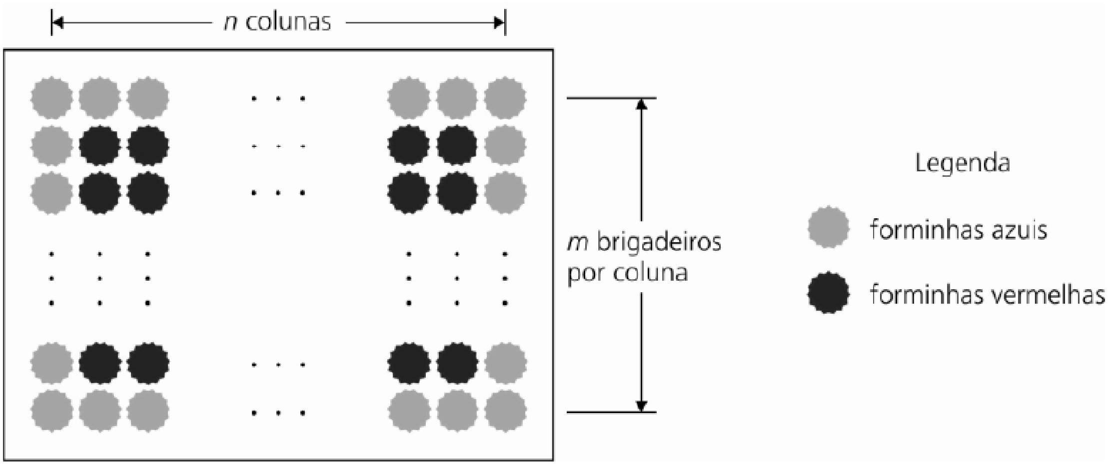
a) Uma consumidora selecionou cebolas pequenas e grandes, somando 40 unidades, que pesaram 1700 g. Formule um sistema linear que permita encontrar a quantidade de cebolas de cada tipo escolhidas pela consumidora e resolva-o para determinar esses valores.
b) Geralmente, as cebolas são consumidas sem casca. Determine a área de casca correspondente a 600 g de cebolas pequenas, supondo que elas sejam esféricas. Sabendo que 600 g de cebolas grandes possuem 192π cm^2 de área de casca, indique que tipo de cebola fornece o menor desperdício com cascas.

82. (Unicamp/03) Os pontos *A* e *B* estão, ambos, localizados na superfície terrestre a 60º de latitude norte; o ponto *A* está a 15º 45’ de longitude leste e o ponto *B* a 56º 15’ de longitude oeste.
a) Dado que o raio da Terra, considerada perfeitamente esférica, mede 6.400 km, qual é o raio do paralelo de 60º?

b) Qual é a menor distância entre os pontos A e B, medida ao longo do paralelo de 60º? (Use 22/7 como aproximação para π)

83. (UFRJ/07) Um grupo de cientistas parte em expedição do Pólo Norte e percorre 200 km em direção ao sul, onde estabelece um primeiro acampamento para realizar experiências. Após algum tempo, o grupo percorre 200 km em direção ao leste, onde instala o segundo acampamento para experimentos. Após três dias, o grupo parte em viagem e percorre 200 km em direção ao norte, onde estabelece o terceiro acampamento. Supondo que a superfície da Terra seja perfeitamente esférica, determine a distância entre o terceiro acampamento e o Pólo Norte. Justifique sua resposta (faça um desenho, se preferir).

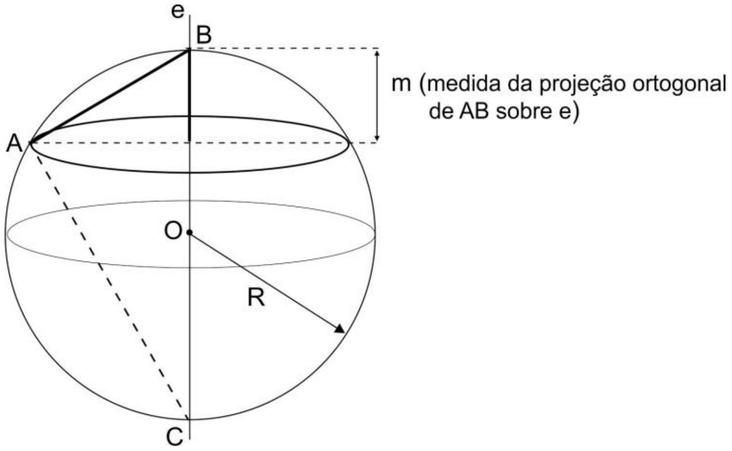
84. (Unicamp/09) Em uma bandeja retangular, uma pessoa dispôs brigadeiros formando n colunas, cada qual com m brigadeiros, como mostra a figura abaixo. Os brigadeiros foram divididos em dois grupos. Os que estavam mais próximos das bordas da bandeja foram postos em forminhas azuis, enquanto os brigadeiros do interior da bandeja foram postos em forminhas vermelhas



a) Sabendo que $m = 3n/4$ e que a pessoa gastou o mesmo número de forminhas vermelhas e azuis, determine o número de brigadeiros da bandeja.
b) Se a pessoa compra a massa do brigadeiro já pronta, em latas de 1 litro, e se cada brigadeiro, antes de receber o chocolate granulado que o cobre, tem o formato de uma esfera de 2 cm de diâmetro, quantas latas ela tem que comprar para produzir 400 brigadeiros? (Dica: lembre-se de que 1 litro corresponde a 1000 cm^3)

85. Uma esfera cuja superfície tem área igual a 676□cm^2 e cortada por um plano situado a uma distancia de 12 cm do seu centro, determinando um circulo.
Nessas condições, determine:
a) a área desse circulo;
b) o comprimento da circunferência máxima dessa esfera;
c) o volume do cone reto cujo vértice é o centro da esfera e a base é o circulo determinado pela intersecção do plano com a esfera.

86. (UERJ/98)

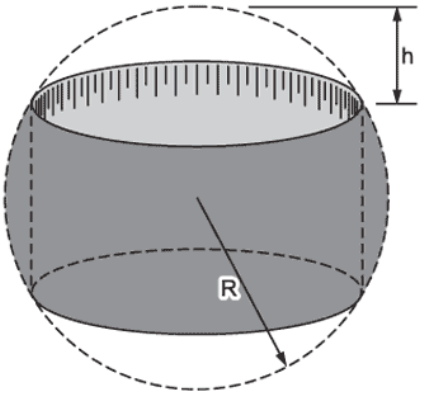


Na figura acima, há um círculo de raio R e uma reta (e) que contém o seu centro - ambos do mesmo plano. Fez-se uma rotação de uma volta desse círculo ao redor da reta (e). O menor arco AB nele assinalado descreveu a superfície de uma calota esférica, cuja área pode ser calculada através da fórmula $2\pi R \cdot m$, sendo m a projeção ortogonal do arco AB sobre a reta (e).

a) Calcule o comprimento da corda $\overline{AB}$, do círculo original, em função de R e m.

b) Demonstre que a área da calota esférica gerada pelo arco AB é equivalente à área plana limitada por uma circunferência de círculo cujo raio tem a mesma medida da corda $\overline{AB}$.

87. (Unicamp/10) Uma peça esférica de madeira maciça foi escavada, adquirindo o formato de anel, como mostra a figura abaixo.



Observe que, na escavação, retirou-se um cilindro de madeira com duas tampas em formato de calota esférica. Sabe-se que uma calota esférica tem volume $V_{cal} = \dfrac{\pi h^2}{3}(3R - h)$, em que h é a altura da calota e R é o raio da esfera. Além disso, a área da superfície da calota esférica (excluindo a porção plana da base) é dada por $A_{cal} = 2\pi Rh$

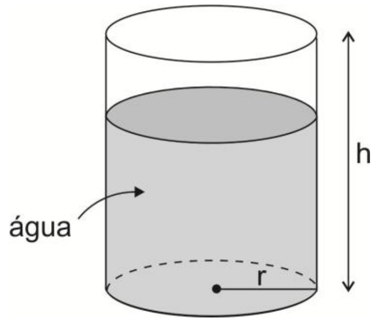
Atenção: não use um valor aproximado para π .

a) Supondo que $h = R/2$, determine o volume do anel de madeira, em função de R.

b) Depois de escavada, a peça de madeira receberá uma camada de verniz, tanto na parte externa, como na interna. Supondo, novamente, que $h = R/2$, determine a área sobre a qual o verniz será aplicado.

88. (Unicamp/88) Numa esfera de raio unitário está inscrito um cubo; neste cubo está inscrita uma esfera, na qual está inscrito um cubo, e assim por diante. Demonstre que os raios das esferas na ordem em que aparecem, estão em progressão geométrica. Determine a razão da progressão e calcule sua soma.

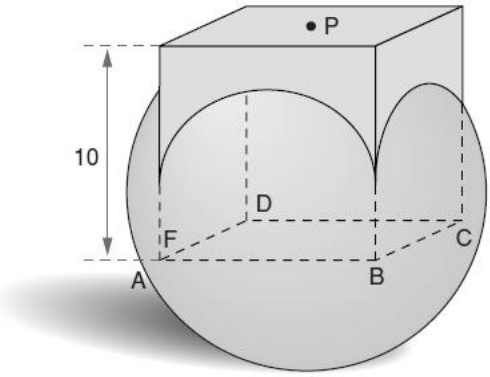
89. (Unifesp) Um recipiente contendo água tem a forma de um cilindro circular reto de altura h = 50 cm e raio r = 15 cm. Esse recipiente contém 1 litro de água a menos que sua capacidade total.



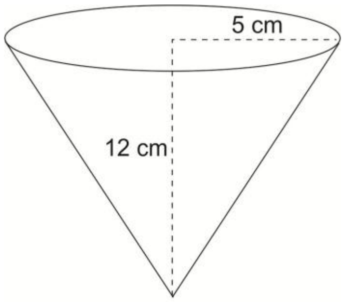
a) Calcule o volume de água contido no cilindro ($\pi = 3{,}14$)

b) Qual deve ser o raio *R* de uma esfera de ferro que, introduzida no cilindro e totalmente submersa, faça transbordar exatamente 2 litros de água?

90. (UFRJ) Um cubo de aresta 10 cm tem os quatro vértices A, B, C e D de uma de suas faces, F, sobre a superfície de uma esfera S de raio r. Sabendo que a face oposta a F é tangente à esfera S no ponto P, calcule o raio r.



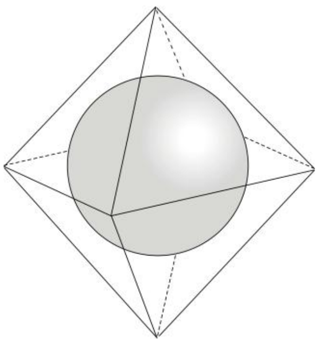
91. (Unicamp/89) Uma esfera de 4 cm de raio cai numa concavidade cônica de 12 cm de profundidade, cuja abertura tem 5 cm de raio. Determine a distância do vértice da cavidade à esfera.



92. Uma esfera de raio 5 cm e um cone cujo raio da base é 5 cm e altura 10 cm estão apoiados sobre uma superfície plana. Um plano paralelo a essa superfície intersecta os dois sólidos determinando círculos congruentes. A que distância da superfície está esse plano?

93. (Unicamp/01) A base de uma pirâmide é um triângulo eqüilátero de lado L = 6 cm e arestas laterais das faces A = 4 cm.
a) Calcule a altura da pirâmide.
b) Qual é o raio da esfera circunscrita à pirâmide?

94. (UEL/06) Um joalheiro resolveu presentear uma amiga com uma jóia exclusiva. Para isto, imaginou um pingente, com o formato de um octaedro regular, contendo uma pérola inscrita, com o formato de uma esfera de raio r, conforme representado na figura a seguir.



Se a aresta do octaedro regular tem 2 cm de comprimento, o volume da pérola, em cm^3, é:

a) $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ b) $\frac{8\pi}{3}$ c) $\frac{8\sqrt{2}\pi}{9}$ d) $\frac{4\sqrt{6}\pi}{9}$ e) $\frac{8\sqrt{6}\pi}{27}$

95. Uma pirâmide possui um triângulo equilátero de lado a como base. As arestas laterais medem b. Determine, em função de a e b, o raio da esfera circunscrita à pirâmide.

96. (Unicamp/94) Em uma pirâmide de base quadrada, as faces laterais são triângulos eqüiláteros e todas as oito arestas são iguais a 1.
a) Calcule a altura e o volume da pirâmide.
b) Mostre que a esfera centrada no centro da base da pirâmide, e que tangencia as arestas da base, também tangencia as arestas laterais.
c) Calcule o raio do círculo intersecção da esfera com cada face lateral da pirâmide.

97. (Unicamp/99) Cada aresta de um tetraedro regular mede 6 cm. Para este tetraedro, calcule:
a) a distância entre duas arestas opostas, isto é, entre duas arestas que não têm ponto comum;
b) o raio da esfera inscrita no tetraedro.

GABARITO

01. E

02. B

03. 20 vértices

04. 60 átomos e 90 ligações

05. B

06. (01) V (02) V (03) V
(04) F (05) F

07. B

08. $BP = \sqrt{3}$

09. $3\sqrt{15}$ m

10. a) R$ 600.000,00
b) 18,98 kg

11. a) $x = 50$
b) R$ 8,40

12. a) 7200 m^3
b) 800 viagens

13. a) 1,2 m
b) 1468,8 litros

14. 1/6

15. a) $V = 375\sqrt{3}\,cm^3$
b) $A = 50\sqrt{3}\,cm^2$

16. $V = 210$

17. $d = \sqrt{2\sqrt{6}}$ cm

18. 68

19. E

20. $\dfrac{350\sqrt{3}}{3}\,cm^3$

21. $2\sqrt{6}$

22. 40

23. D

24. a) 6
b) Demonstração
c) Demonstração

25. a) Para S_1: 5 vértices, 5 faces e 8 arestas
Para S_2: 6 vértices, 5 faces e 9 arestas
b) $V = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

26. a) $AB = 20\sqrt{2}$ cm
b) $V = \dfrac{2000\sqrt{6}}{3}\ cm^3$

27. A

28. $V = \dfrac{\ell^3}{6}$

29. a) $a = 5\sqrt{2}\,cm$
b) $V = \dfrac{500}{3}\,cm^3$

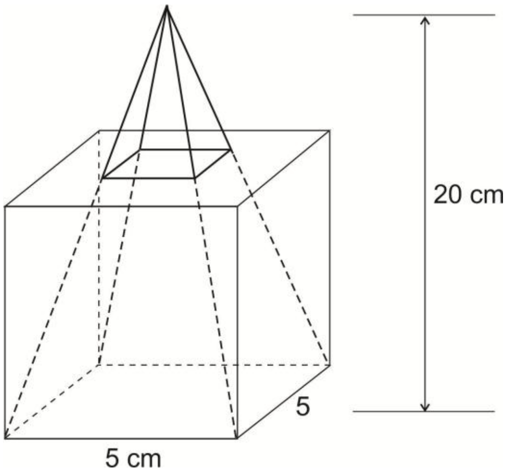
30. a) $\dfrac{a^3}{3}$
b) $\dfrac{1}{3}$

31. C

32. $a/3$

33. A

34. Supondo que a base do cubo coincida com a base da pirâmide (conforme a figura abaixo), temos
$V = 1000\ cm^3$



35. A

36. $\dfrac{h_{\text{quad}}}{h_{\text{hex}}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

37. a) $R = 5\,\text{m}$

b) $h = 5\sqrt{3}$

38. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

39. a) $V = \dfrac{4}{3}\,\text{cm}^3$

b) $d(A,\ pl(BCD_1)) = \sqrt{2}\,\text{cm}$

40. D

41. a) $V_{P1} = 625\,\text{cm}^3$

b) $V_{P2} = \dfrac{16875}{13}\ \text{cm}^3$

42. E

43. a) $S = \sqrt{5}\ \text{cm}^2$

b) $V = \dfrac{5}{6}\,\text{cm}^3$

44. 360 cm^3

45. $V = 56\sqrt{29}$

46. Demonstração

47. 11

48. A

49. Faria transbordar

50. $V = \dfrac{9\pi}{5}$

51. a) $x = 28,4\,\text{cm};\quad y = 27\,\text{cm}$

b) $V = \dfrac{x^2}{16}\cdot\left(y - \dfrac{x}{4}\right)$

52. a) $V = 600\pi\ \text{cm}^3$

b) $V_{chuva} = 3\cdot 10^2\ \text{m}^3$

53. 96 cm^3

54. E

55. $V = \dfrac{1}{2}\pi r^2(a+b)$

56. $V = 5\pi\ \text{cm}^3$

57. B

58. 50

59. A

60. $h = \sqrt{99}\ \text{cm}$

61. E

62. E

63. E

64. $V = \dfrac{14\pi}{3}$

65. a) $\lambda = 6$

b) $S = \{3,\ 1+i,\ 1-i\}$

c) $V = \dfrac{8\pi}{3}$

66. $V = 67\ \text{cm}^3$

67. $\dfrac{h}{H} = \dfrac{7}{8}$

68. a) $A(x) = \pi\left(\dfrac{R}{H}\right)^2 x^2 - 2\pi\dfrac{R^2}{H}x + \pi R^2$

b) $V = \dfrac{\pi R^2 H}{3}$

69. 625 cm

70. A

71. a) $DL = 4\,\text{cm}$ e $CK = 2\,\text{cm}$

b) $V = 42\,\text{cm}^3$

72. a) Tronco de cone

b) Cilindro

73. B

74. a) $V = \dfrac{21}{4}\,\text{m}^3$

b) $h = 2\,\text{m}$

75. a) $h = 3\sqrt{6}$

b) Demonstração

c) $\ell = 9 - \sqrt{6}$

76. a) $V = 0{,}04\,\text{cm}^3$

b) $V' = 3{,}8\pi\,\text{mm}^3$

77. C

78. $\dfrac{R}{r} = \sqrt{3} + 1$

79. $\dfrac{224\sqrt{3}}{3}$

80. a) 30 cm e 60 cm

b) $S = 1125\pi\,\text{cm}^2$

81. a) 36 cebolas pequenas e 4 cebolas grandes

b) A cebola grande fornece o menor desperdício com cascas.

82. a) $R = 3200\,\text{km}$

b) 4022,9 km

83. Zero

84. a) 48 brigadeiros

b) 2 latas

85. a) $A = 25\pi\,\text{cm}^2$

b) $C = 26\pi$ cm

c) $V = 100\pi$

86. a) $AB = \sqrt{2Rm}$

b) Demonstração

87. a) $V_{anel} = \dfrac{\pi R^3}{6}$

b) $S = (\sqrt{3} + 2) \cdot R^2$

88. $S = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$

89. a) 34,325 litros

b) $R = 10 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{9}{4\pi}}$ cm

90. $r = 7{,}5\,\text{cm}$

91. 6,4 cm

92. $\dfrac{10}{3}$ cm

93. a) $h = 2\,\text{cm}$

b) $R = 4\,\text{cm}$

94. E

95. $R = \dfrac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \frac{1}{3}a^2}}$

96. a) $h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $V = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

b) Demonstração

c) $R = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

97. a) $d = 3\sqrt{2}$ cm

b) $R = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ cm